TARTU ÜLIKOOL
MATEMAATIKA-INFORMAATIKATEADUSKOND
Puhta matemaatika instituut
Matemaatika didaktika õppetool

Aile Jair

LOOKUSED, NENDE KONSTRUEERIMINE DÜNAAMILISE GEOMEETRIA TARKVARA ABIL

Magistritöö

Juhendaja: dots Tiit Lepmann

Autor:……………………………………….… „…“ ………… 2005 a.
Juhendaja:…………………………………... „…“ ………… 2005 a.
Õppetooli hoidja:………………………………. „…“ ………… 2005 a.

Tartu 2005

Sisukord

Sissejuhatus

Matemaatika õpetamise ühe olulisema puudujäägina nii üldhariduskooli kui ka kõrgkooli tasemel tuuakse sageli esile tõsiasja, et me õpetame nn valmis ehk silutud matemaatikat [12]. Sellise õpetamise käigus me varustame õpilased küll valmis reeglite ja faktidega, kuid jätame nad sageli ilma teadmisest, kuidas need reeglid ja faktid on tekkinud. Koos sellega ja ehk ka seetõttu ei jõua õpilaseni piisaval tasemel vastavad uue avastamist-loomist toetavad tunnetusmeetodid. On ka teine, eriti viimastel aastatel propageeritud tee. Seda teed iseloomustavad senisest tugevam rõhuasetus matemaatika kognitiivsete (omandamisprotsessi iseloomustavate tunnetuslike) pädevuste saavutamisele ja nende selge eristamine puht ainealastest pädevustest. Matemaatika didaktikas käsitletakse kognitiivsete pädevuste all tavaliselt järgmisi, õpilastelt oodatavaid saavutusi:

1) analüüsioskus (terviku liigendamisoskus; invariandi nägemisoskus protsessis; mustri, seaduspära avastamisoskus jt);
2) üldistamisoskus (üksikult üldisele liikumise oskus, mõiste moodustamise oskus; seose formuleerimise oskus jt);
3) põhjendamisoskus (induktiivse ja deduktiivse järeldamise oskus, järelduste ahela moodustamise oskus, kommunikatiivsed oskused jt);
4) probleemi lahendamise oskus:
    - probleemi nägemise ja selge ning korrektse formuleerimise oskus;
    - matemaatilise mudeli koostamise oskus (mõistete ja seoste rakendamise oskus; erinevate esitusviiside valiku- ja rakendusoskus jt);
    - saadud mudeli rakendamisoskus (erinevate algoritmide kasutamisoskus, oskus hinnata tulemuse õigsust, saadu interpreteerimisoskus jt) [5, 7].

Kõiki neid oskusi võimaldab edukalt arendada dünaamilise geomeetria tarkvara GeomeTricks.

Käesolev magistritöö kujutab endast ülesannete kogu, mis on sobiv nii gümnaasiumiklasside matemaatikaringide kui ka ülikooli esmakursuste õppematerjaliks. Töö eesmärgiks on luua õppevahend õpilaste kognitiivsete pädevuste arendamiseks programmi GeomeTricks abil.

Magistritöösse ongi koondatud ülesanded, mis autori arvates toetavad oluliselt ülaltoodud oskuste kujunemist. Ülesanded on konstruktsioonülesanded ja need on lahendatavad programmi GomeTricks abil. Probleemiseadete jaoks on leitud abi kirjandusest [4, 9, 11, 13, 14, 16-21, 29, 31], lahendused ja vastavad konstruktsioonid on aga autori looming.

Konstruktsioonülesannete lahendamise loomulikuks etapiks on konstruktsiooni ja ülesande lahenduse põhjendamine. Vastavalt ülesande raskusastmele on töös osade ülesannete korral nõutud rangeid põhjendusi, osade puhul aga vaid selgitusi ja kirjeldusi.

Käesolev töö koosneb neljast peatükist. Esimene peatükk „Programm GeomeTricks. Sissejuhatavaid ülesandeid programmiga“ sisaldab ülevaadet programmist GeomeTricks. Lugejat tutvustatakse programmi GeomeTricks võimalustega, tehes seda detailsete juhistega algul sammhaaval ning minnes järk-järgult üle keerukamatele konstruktsioonidele. Lugejale pakutud juhise punktid on välja toodud sümboli „❖“ abil. Peatükk lõppeb *lookuse* mõiste käsitlusega ning lookust tutvustavate ülesannetega.

Teine peatükk „Kolmnurga tähtsamate joonelementide lõikepunkti poolt tekitatav jälg“ sisaldab kolmnurga külgede keskristsirgete, nurgapoolitajate, mediaanide ja kõrguste lõikepunkti lookuse (jälje) uurimist. Seejuures vaadeldakse kolmnurga ühe tipu lohistamisel kolme erinevat võimalust:

1) kolmnurga tipp liigub täiesti vabalt;
2) kolmnurga tipp liigub täiesti mööda sirget;
3) kolmnurga tipp liigub täiesti mööda ringjoont.

Kolmas peatükk koosneb erinevatest ülesannetest lookuste konstrueerimisele. Siinjuures tuleb lugejal leida lookus ka definitsiooni põhjal. Peatükk algab kergemate konstruktsioonülesannetega, mis lähevad järk-järgult raskemaks ning lõppeb definitsioonile tuginevate lookuste leidmisega.

Neljandas peatükis on toodud ülesannete lahendused ja põhjendused ning valikuliselt, vastavalt konstruktsiooni keerukusele, ka konstruktsioonide juhiseid.

1. Programm GeomeTricks. Sissejuhatavaid ülesandeid programmiga

Käesoleva peatüki esimeses punktis on toodud lühiülevaade geomeetriaprogrammist GeomeTricks. Ülejäänud kaks punkti sisaldavad sissejuhatavaid ülesandeid edasiseks tööks. Ülesanded hõlmavad nii põhikoolis ja gümnaasiumis omandatut kui ka nende tõdede edasiarendusi. Lisaks saab lugeja tutvuda lookuse mõistega.

1.1. Ülevaade programmist GeomeTricks

GeomeTricks on dünaamilise geomeetria programm, mida saab kasutada planimeetria õppimisel-õpetamisel. GeomeTricksi abil saab joonestada geomeetrilisi kujundeid ja konstrueerida uusi objekte juba olemasolevate objektide baasil. Võimalik on töötada kas nähtava koordinaatteljestikuga või ilma selleta. Sisendaknasse saab sisestada punkti koordinaate ja sirge võrrandeid. Hiirega saab liigutada punkte (nt kujundi tippe) ning vaadata, kuidas muutuvad seeläbi kujundid. Võimalik on mõõta kaugusi, nurki ja pindalasid. Tulemused ilmuvad vastavasse väljundaknasse.

Selle tarkvara kasutamiseks peavad arvutil olema täidetud järgmised miinimumvajadused: IBM PC või ühtesobiv (486 või hilisem), Microsoft Windows 3.1x (või hilisem) või Windows 95 (98), 8 MB RAM, 3 MB vaba kõvaketta ruumi, vähemalt 256 värviga SVGA kuvar ja hiir.

GeomeTricks on loodud Taani õppejõu ja tarkvara looja Viggo Sadolin (Royal Danish School of Educational Studies) poolt. Programm on olemas kõigis Eesti koolides. Viimane versioon on toodud Phare IV CD-l. Eelmiseid versioone võib leida eelmistelt Phare CD-delt.

Programmi on võimalik rakendada koolis nii õpitava materjali omandamist lihtsustava näitliku abivahendina kui ka ühe võimalusena teadmisi kontrollida. Planimeetrias kehtivaid seoseid ning teoreeme GeomeTricksi abil iseseisvalt uurides ning miks mitte ka ise avastades on igal kasutajal võimalik ise veenduda nende paikapidavuses.

Programmi GeomeTricks eeliseks on tema kasutamise lihtsus. Selge ning arusaadav kasutajaliides teevad programmi töötamise võimalikuks ka väiksema arvutialase ettevalmistusega kasutajale. Väike maht ning vähesed nõuded riistvarale on eelised, mis teevad programmi koolides-kodudes kergesti kasutatavaks.

Programmi töös kasutatavat keelt saab läbi txt-laiendiga menüüfailide muuta vastavalt kasutaja vajadusele. See annab võimaluse kasutada programmi ka eestikeelsena.

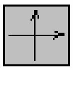
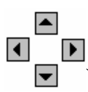
Programmi Eestisse sattumisel on oluline roll Anne Villemsil (Tartu Ülikool). Programmi on eestindanud Peedu Põld (Tartu Ülikool) ja Eno Tõnisson (Tartu Ülikool), kes on läbi viinud ka vastavat koolitust. Eestis on GeomeTricks umbes viis aastat tuntud ning koolides laialt kasutusel [23].

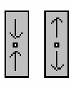
Lisainfot programmiga GeomeTricks töötamisvõimaluste kohta võib leida Phare ISE programmi kodulehelt (vt URL=http://www.ise.ee/cdrom/cd2/geometricks226.htm).

1.2. Programmi GeomeTricks rakendusi koolimatemaatikas

Käsitleme järgnevas programmi GeomeTricks abil kolmnurga tähtsamate joonelementide konstrueerimisvõimalusi ja omadusi. Vaatlusele tulevad sealhulgas kolmnurga kõrgus, mediaan, nurgapoolitaja ja külje keskristsirge. Esitatava eesmärgiks on tutvustada lugejat programmi erinevate menüüde kasutamisega ja antud töö järgnevates osades vajaminevate geomeetriaalaste teadmiste aktiviseerimine. Teeme seda tööjuhendite ja neid saatvate harjutusülesannete abil. Ülesannete lahendajat abistavad sümboliga „❖“ eraldatud „Juhised”. Ühtlasi toome sisse ka töös vajaminevad dünaamilise geomeetria tarkvara rakendamisega seonduvad olulisemad mõisted. Toetume seejuures Tiit Lepmanni [11] ja ka Rael Tensoni [22] käsitletud materjalile.

1.2.1. Koordinaatteljestikuga seotud punktid

1. Kasutades ikooni , avage programmis koordinaatteljestik. Nihutage seda paremale ja vasakule ning üles ja alla (ikoon ).

Muutke koordinaatteljestiku mastaapi ().

2. Kasutades menüüd „Sõltumatu objekt”, asetage teljestikku punktid A, B ja C (valik „Koordinaatvõrgupunkt”). Selleks ei pea eraldi iga punkti korral otsima valikut

„Koordinaatvõrgupunkt”. Programmi poolt täidetav käsk on loetav ekraanilt ja seda täidetakse seni, kuni pole antud uut korraldust. Punktide tähised *A*, *B* ja *C* võtke vasakul olevast veerust. Klõpsake hiirega tähel ja seejärel nimetataval punktil. Täht kinnistub punktile, kui viimane muudab värvi.

3. Tutvuge menüüs „Redaktor” eelmise objekti kustutamise võimalusega (valik „Eelmise objekti kustutamine”). Kustutage nii järjest kõik punktid.

4. Korrake alapunktis 2 tehtut.

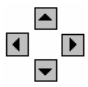
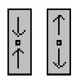
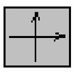
5. Tutvuge menüüs „Fail” kogu ekraani kustutamise võimalusega (valik „Kõige kustutamine”). Kustutage kogu ekraan.

6. Kasutades menüüd „Sõltuv objekt”, konstrueerige

- sirge *AB* (valik „Sirge (. , .)”);
- lõik *CD* (valik „Sirglõik (. , .)”);
- kiir *EF* (valik „Kiir (. , .)”).

Asetage selleks koordinaatteljestikku vajalikud punktid ja pärast valikut menüüst „Sõltuv objekt” klõpsake vastavat sirget, kiirt või lõiku määravatel punktidel. Kiire puhul pöörake tähelepanu ka punktide klõpsamise järjekorrale. Konstrueerige kiired *GH* ja *HG*!

7. Uurige objekti peitmise (valik „Objekti peitmine”) ja taasesitamise (valik „Peidetud objektide näitamine”) võimalusi menüüst „Redaktor”. Peitke esmalt sirge ning seejärel lõik ja kiired. Klõpsake selleks hiirega peidetaval objektil. Esitage need taas. *Kas on võimalik ka ühekaupa taasesitus?*

8. Nihutage teljestikku  ja muutke selle mastaapi . Kaotage teljestik  ja puhastage kogu ekraan.

<u>Ülesanne 1.1.</u>

Konstrueerige koordinaatteljestikus nelinurk *ABCD.* Lohistage selle nelinurga tippe selliselt, et tekiks

a) trapets;

b) täisnurkne trapets;

c) võrdhaarne trapets;

d) rööpkülik;

e) romb;

f) ristkülik;

g) ruut.

Juhised.

- ❖ Asetage ekraanile vajalik arv punkte (menüü „Sõltumatu objekt”, valik „Koordinaatvõrgupunkt”).
- ❖ Tähistage punktid tähtedega *A*, *B*, *C* ja *D*.
- ❖ Ühendage punktid lõikudega (menüü „Sõltuv objekt”, valik „Sirglõik (. , .)”).

Kustutage ekraan.

1.2.2. Vabad määramata kujundid

Menüü „Sõltumatu objekt” valik „Vaba punkt” võimaldab ekraanil esitada punkte, mille asukohta saab hiire abil vabalt muuta. Sellised punktid määravad nn **vabad määramata kujundid**, millede kuju on hiirega kujundi tippe lohistades vabalt muudetav.

Ülesanne 1.2.

Konstrueerige vaba määramata kolmnurk *ABC*. Lohistage kolmnurga tippe nii, et tekiks erinevat liiki kolmnurgad. Kasutage seejuures koordinaatteljestiku abi.

Juhised.

- ❖ Asetage ekraanile kolm vaba punkti (menüü „Sõltumatu objekt”, valik „Vaba punkt”).
- ❖ Tähistage punktid tähtedega *A*, *B* ja *C*.
- ❖ Konstrueerige lõigud *AB*, *BC* ja *AC* (menüü „Sõltuv objekt”, valik „Sirglõik (. , .)”).

Kustutage ekraan (menüü „Fail”, valik „Kõige kustutamine”).

1.2.3. Vabad määratud kujundid

Ekraanil vabalt liigutatav kujund võib olla määratud oma etteantud mõõtmetega, nendevahelise seostega või mingite muude kujundit iseloomustavate näitajatega. Selliseid kujundeid nimetame edasises **vabadeks määratud kujunditeks**. Üheks lihtsamaks vabaks määratud kujundiks on antud raadiusega ringjoon.

<u>Ülesanne 1.3.</u>

Konstrueerige keskpunkti ja etteantud raadiusega ringjoon. Püüdke saadud ringjoont lohistada ekraanil. Kuidas ja kas üldse on võimalik muuta selle ringjoone suurust ekraanil?

<u>Juhised.</u>

- ❖ Fikseerige esmalt ekraanil ringjoone keskpunkt (menüü „Sõltumatu objekt", valik „Vaba punkt").
- ❖ Joonestage nõutud ringjoon (menüü „Sõltuv objekt", valik „Ringjoon (kp, r)"). Pärast vastavat valikut tuleb ekraanile ilmunud dialoogaknasse sisestada soovitav raadius.

Kustutage ekraan.

<u>Ülesanne 1.4.</u>

Konstrueerige ringjoone keskpunkti ja ühe punktiga määratud ringjoon. Lohistage saadud ringjoone keskpunkt teise kohta. Püüdke vedada ringjoonel asuvat punkti. Peitke ringjoone keskpunkt, seejärel kogu ringjoon. Tooge nad taas nähtavaks.

<u>Juhised.</u>

- ❖ Fikseerige teljestikuta ekraanil esmalt ringjoone keskpunkt A, siis suvaline ringjoonele kuuluv punkt B.
- ❖ Ringjoone saamiseks valige menüüst „Sõltuv objekt" käsk „Ringjoon (kp, .)" ja näidake seejärel hiirega klõpsates õiges järjekorras (*millises?*) ringjoone keskpunkt ja ringjoonele kuuluv punkt.
- ❖ Objekti peitmiseks ja taas nähtavale toomiseks on abiks menüü „Redaktor".

Kustutage ekraan.

Ülesanne 1.5.

Konstrueerige suvalise lõigu pikkusega määratud raadiusega ringjoon. Muutke ringjoone asukohta, vedades selle keskpunkti. Muutke ringjoone suurust.

Juhised.

- Asetage teljestikuta ekraanile vabad punktid *A*, *B* ja *C*.
- Keskpunktiga *A* ja raadiusega *BC* ringjoone saamiseks valige menüüst „Sõltuv objekt” käsk „Ringjoon (kp, . , .)”. Näidake kõigepealt hiirega klõpsates ringjoone keskpunkt *A* ning seejärel raadiuse pikkust määrav lõik *BC*. *Milliste punktide lohistamisega saab muuta ringi suurust? Mis juhtub, kui raadiust määrava lõigu üheks otspunktiks valida ringjoone keskpunkt?*

Kustutage ekraan.

1.2.4. Lõigu poolitamine, kolmnurga külje keskristsirge ja kolmnurga ümberringjoon

Sirget, mis poolitab antud lõigu ja on risti selle lõiguga, nimetatakse selle **lõigu keskristsirgeks**. Sirget, mis läbib kolmnurga külje keskpunkti ja on selle küljega risti, nimetatakse **kolmnurga külje keskristsirgeks** [24]. Konstrueerime järgnevas lõigu keskristsirge, kasutamata programmi poolt pakutud vastavat valikut. Uurime samas ka selle joone punktide omadusi.

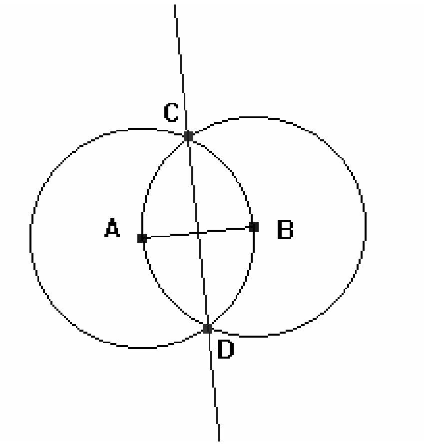
Ülesanne 1.6.

Kasutamata menüü „Sõltuv objekt” valikut „Keskristsirge (. , .)”, konstrueerige lõigu *AB* keskristsirge.

Juhised.

- Asetage ekraanile vabad punktid *A* ja *B* (menüü „Sõltumatu objekt”, valik „Vaba punkt”). Joonestage neid punkte ühendav lõik *AB* (menüü „Sõltuv objekt”, valik „Sirglõik (. , .)”).
- Joonestage kaks ringjoont järgmiselt: üks keskpunktiga *A* ja ringjoonel asuva punktiga *B* (menüü „Sõltuv objekt”, valik „Ringjoon (kp, .)”), teine keskpunktiga *B* ja ringjoonel asuva punktiga *A*.

- ❖ Fikseerige ringjoonte lõikepunktid (menüü „Sõltuv objekt”, valik „Lõikepunkt (o , o)”). Näidake kordamööda ringjooned, mille lõikepunkte soovite leida. Tähistage lõikepunktid tähtedega *C* ja *D*.
- ❖ Joonestage sirge *CD* (menüü „Sõltuv objekt”, valik „Sirge (. , .)”). *Miks osutub saadud sirge keskristsirgeks* (vt joonis 1.1)*?* Uurige joonist, vedades punkte *A* ja *B* erinevatesse kohtadesse.
- ❖ Tooge saadud keskristsirge esile, värvides ta siniseks. Selleks võtke menüüst „Redaktor” käsk „Värvi/laadi muutmine”, seejärel klõpsake sinist värvi värvipaletil ning edasi sirget.



Joonis 1.1.

- ❖ Peitke mõlemad ringjooned (menüü „Redaktor”).

Salvestage joonis (menüü „Fail”) nimega yl_6.tri.

<u>Ülesanne 1.7.</u>

Uurige lõigu keskristsirge omadusi. Võrrelge selleks lõigu keskristsirge suvalise punkti kaugusi lõigu otspunktidest. (Kasutage eelmise ülesande joonist avades menüüst „Fail” joonis yl_6.tri).

Vaadeldav programm võimaldab kinnistada vabu punkte ekraanil olevale joonele nii, et punkti lohistades jääb see alati antud joonele. Sirge puhul võimaldab seda menüü „Kinnistamine” valik „Vaba punkt sirgele (_ , .)”.

<u>Juhised.</u>

- ❖ Lõigu keskristsirge punktide omaduse selgitamiseks tähistage esmalt sirge *CD* tähega *k*. Valige seejärel sirge *k* läheduses vaba punkt *E* ning kinnistage see sirgele *k*.
- ❖ Punkti *E* kinnistamiseks sirgele *k* valige menüüst „Kinnistamine” käsk „Vaba punkt sirgele (_ , .)”. Näidake seejärel hiirega klõpsates esmalt sirge ja seejärel punkt, mille soovite kinnistada vaadeldavale sirgele.
- ❖ Joonistage nüüd lõigud *AE* ja *BE* ning mõõtke nende pikkused. Lõikude pikkuste mõõtmiseks valige menüüst „Vaatlus” käsk „Kaugus” ning näidake seejärel hiirega klõpsates mõõdetavate lõikude otspunktid.

- ❖ Võrrelge lõikude pikkust, vedades punkti *E* mööda sirget *k*. *Mis selgub?*

Kustutage ekraan.

<u>Ülesanne 1.8.</u>

Sõnastage lõigu *AB* keskristsirge punktide omadus. Põhjendage see.

<u>Ülesanne 1.9.</u>

Konstrueerige lõigu *AB* keskpunkt menüü „Sõltuv objekt” valikut „Keskpunkt (. , .)” kasutamata. (Kasutage salvestatud joonist yl_6.tri). Veenduge mõõtmise ja lõigu otspunktide vedamise abil, et saadud punkt on tõesti alati lõigu keskpunkt.

<u>Juhised.</u>

- ❖ Lõigu *AB* keskpunkti fikseerimiseks kasutage menüü „Sõltuv objekt” valikut „Lõikepunkt (_ , _)”.
- ❖ Peitke kõik ülearused konstruktsiooni jooned (konstruktsiooni abijooned; menüü „Redaktor”).

Kustutage ekraan.

<u>Ülesanne 1.10.</u>

Konstrueerige lõigu *AB* keskristsirge ja lõigu *CD* keskpunkt, kasutades programmi vastavaid käske.

<u>Juhised.</u>

- ❖ Konstrueerige esmalt vastavad lõigud. Seejärel, pärast menüü „Sõltuv objekt” valikuid „Keskristsirge (. , .)” ning „Keskpunkt (. , .)”, näidake hiirega klõpsates vaadeldavate lõikude otspunktid.
- ❖ Kontrollige menüü „Vaatlus” abil keskristsirge punktide omaduse kehtivust.

Kustutage ekraan.

<u>Ülesanne 1.11.</u>

Selgitage, kuidas leida kolmnurga ümberringjoone keskpunkti. Mida olulist võib öelda kolmnurga ümberringjoone keskpunkti kauguste kohta kolmnurga tippudest?

Juhised.

- ❖ Konstrueerige vaba määramata (mittemääratud) kolmnurk *ABC*. Joonestage selle kolmnurga külje *AB* keskristsirge *k*, kasutades menüü „Sõltuv objekt" valikut „Keskristsirge (. , .)". *Mida olulist võib öelda selle sirge suvalise punkti kauguste kohta kolmnurga tippudest A ja B?*
- ❖ Joonistage ka kolmnurga külje *BC* keskristsirge *l*. *Kuidas asetsevad sirge l punktid kolmnurga tippude B ja C suhtes?*
- ❖ Fikseerige sirgete *k* ja *l* lõikepunkt (menüü „Sõltuv objekt", valik „Lõikepunkt (_ , _)") ja tähistage see tähega *D*. *Kuidas asetseb punkt D kolmnurga ABC tippude suhtes? Millises punktis asub kolmnurga ümberringjoone keskpunkt?*

Salvestage joonis nimega yl_11.tri

Ülesanne 1.12.

Uurige kolmnurga ümberringjoone keskpunkti *D* paiknemist lähtekolmnurga suhtes, lohistades viimase tippe. (Avage joonis yl_11.tri ja peitke keskristsirged.) Millal asub ümberringjoone keskpunkt kolmnurga sise-, millal kolmnurga välispiirkonnas, millal kolmnurga küljel? Millisel kolmnurga küljel asub täisnurkse kolmnurga ümberringjoone keskpunkt? Kuidas jaotab see punkt kolmnurga vastava külje?

Ülesandes 1.12 esitatud küsimustele täpsema vastuse saamiseks on otstarbekas mõõta vaadeldava kolmnurga nurgad ja seada vastused sõltuvusse kolmnurga liikidest nurkade järgi. Nurkade suurust võimaldab mõõta menüü „Vaatlus" valik „Nurk (. , . , .)". Seejuures tuleb nurga näitamisel alati nurga tipp näidata keskmisena kolmest näidatavast punktist. Valik „Vaatluse lõpetamine" kustutab vaatluste akna sisu.

1.2.5. Punkti projektsioon sirgel, Simsoni sirge, kõõlnelinurk, piirde- ja kesknurk

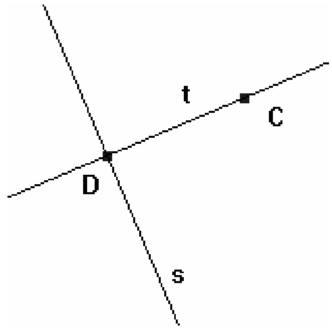
Punkti *C* ristprojektsioon sirgel *s* on sirgega *s* ristuva ja punkti *C* läbiva sirge *t* ja sirge *s* lõikepunkt *D*. **Sirgel asuva punkti ristprojektsioon sellel sirgel** on see punkt ise [1].

Ülesanne 1.13.

Konstrueerige antud definitsiooni järgi punkti *C* ristprojektsioon sirgel *s*.

Juhised.

- Konstrueerige suvaline sirge *s* ja vaba punkt *C*, mis ei kuulu sirgele *s*.
- Ristprojektsiooni joonestamiseks konstrueerige antud punkti *C* läbiv ja antud sirgega *s* ristuv sirge *t* (menüü „Sõltuv objekt", käsk „Ristsirge (. , _)"). Selleks klõpsake hiirega pärast vastavat valikut esmalt punkti *C* ja siis sirget *s*.
- Fikseerige sirgete lõikepunkt (menüü „Sõltuv objekt", valik „Lõikepunkt (_ , _)"), mis ongi otsitav ristprojektsioon *D* (vt joonis 1.2).
- Peitke abijooned (so ristsirge).



Joonis 1.2.

Kustutage ekraan.

Ülesanne 1.14.

Uurige kolmnurga ümberringjoone suvalise punkti ristprojektsioone kolmnurga külgedel või külgede pikendustel. Kuidas need paiknevad?

Juhised.

- Joonestage võimalikult suur vaba teravnurkne määramata kolmnurk *ABC*.
- Kolmnurga ümberringjoone keskpunkti *D* leidmiseks fikseerige külgede keskristsirgete lõikepunkt (menüü „Sõltuv objekt", valik „Lõikepunkt (_ , _)"). Ringjoone joonestamiseks kasutage menüü „Sõltuv objekt" valikut „Ringjoon (kp, .)".
- Peitke abijooned.
- Valige kolmnurga ümberringjoone lähedal vaba punkt ning kinnistage see ringjoonele (menüü „Kinnistamine", valik „Vaba punkt ringjoonele (o , .)"). Kinnistamisel näidake esmalt ringjoon ning seejärel kinnistatav punkt. Tähistage see punkt tähega *E*.
- Joonestage läbi punkti *E* ristsirged kolmnurga *ABC* kõikidele külgedele või nende pikendustele (vt ül 1.13 juhiseid). Fikseerige ja tähistage nende ristsirgete ja kolmnurga külgede lõikepunktid tähtedega *F*, *G* ja *H*. Peitke seejärel ristsirged.

- Lohistage punkti *E* mööda ringjoont. *Mida huvitavat selgub seonduvalt punkti E ristprojektsioonide asendiga? Sõnastage saadud tulemus.*
- Joonestage läbi punktide *F*, *G* ja *H* sirge. Kontrollige eelmises alaülesandes püstitatud hüpoteesi, muutes kolmnurga kuju. Veendumaks, et ikka alati on tegu ristprojektsioonidega, võite joonisel punkti *E* ühendada lõikude abil oma projektsioonidega (menüü „Sõltuv objekt”, valik „Sirglõik (. , .)”).

Sellisel viisil saadud sirget nimetatakse kolmnurga *ABC* ümberringjoone punkti *E* **Simsoni sirgeks**.

Kustutage ekraan.

Ülesanne 1.15.

Uurige sellise nelinurga omadusi, mille tippe läbib ringjoon. Püüdke nelinurga tippe lohistades tekitada ruut, ristkülik, romb (mis ei ole ruut), rööpkülik ja trapets. Millised kujundid on võimalik nii saada? Kuidas on seotud nende nelinurkade vastasnurgad?

Juhised.

- Asetage ekraanile kaks vaba punkti (menüü „Sõltumatu objekt”, valik „Vaba punkt”) ja konstrueerige nende abil ringjoon (menüü „Sõltuv objekt”, valik „Ringjoon (kp, .)”).
- Kinnistage ringjoonele neli vaba punkti *A, B, C* ja *D* ja ühendage need järjestikku lõikudega (menüü „Sõltuv objekt”, valik „Sirglõik (. , .)”). Lohistage nelinurga tippe püüdes tekitada erinevat liiki nelinurki. Uurige ka sellist konstrueerimisvõimalust, kui kinnistada ringjoonele kolm vaba punkti ja neljandaks võtta ringjoont määrav punkt.

Salvestage joonis nimega yl_15.tri

Nelinurka, mille tipud paiknevad ühel ja samal ringjoonel, nimetatakse **kõõlnelinurgaks** [1].

Ringjoone mingist punktist lähtuva kahe kõõlu vahelist nurka nimetatakse **piirdenurgaks**. Ringjoone kahe raadiuse vahelist nurka, mis toetub nende raadiuste vahele jäävale ringjoone kaarele, nimetatakse **kesknurgaks** [1].

Ülesanne 1.16.

Konstrueerige toodud mõistete järgi ringjoone samale kaarele toetuv kesk- ja piirdenurk. Lohistades piirdenurga tippu, uurige

1) kuidas muutub piirdenurk;
2) milline seos kehtib piirde- ja kesknurga vahel.

Juhised.

- ❖ Konstrueerige määratud raadiusega ringjoon keskpunktiga *O* (valik „Ringjoon (kp, r)”). Kinnistage ringjoonele kolm vaba punkti *A*, *B* ja *C* (valik „Vaba punkt ringjoonele (o, .)”).
- ❖ Konstrueerige lõikude abil nurgad *ABC* ja *AOC*.
- ❖ Mõõtke nurgad (menüü „Vaatlus”, valik „ Nurk (. , . , .)”).

Ülesanne 1.17.

Sõnastage kõõlnelinurga *ABCD* vastasnurkade omadus. Põhjendage.

Ülesanne 1.18.

Uurige, kuidas jaotavad kõõlnelinurga *ABCD* tema diagonaalid *AC* ja *BD* (lõikepunktiga *F*). Mida võite öelda tekkinud kolmnurkade *ABF* ja *DFC* ning *AFD* ja *BFC* kohta? Põhjendage. (Kasutage faili yl_15.tri)

Juhised.

- ❖ Avage fail yl_15.tri (vt ül 1.15.)
- ❖ Konstrueerige nelinurgale *ABCD* diagonaalid (menüü „Sõltuv objekt”, valik „Sirglõik (. , .)”). Fikseerige nende lõikepunkt *F* (menüü „Sõltuv objekt”), valik „Lõikepunkt (_ , _)”.

Kustutage ekraan.

1.2.6. Kolmnurga mediaan ja kõrgus

Kolmnurga mediaaniks nimetatakse kolmnurga tipust vastaskülje keskpunkti tõmmatud lõiku või selle pikkust [24].

Ülesanne 1.19.

Konstrueerige vaba kolmnurk *ABC* ja selle kõik mediaanid. Uurige mediaanide omadusi.

Juhised.

- ❖ Fikseerige kolmnurga *ABC* külgede keskpunktid (menüü „Sõltuv objekt", valik „Keskpunkt (. , .)"). Ühendage kolmnurga tipud vastaskülje keskpunktidega (valik „Sirglõik (. , .)").
- ❖ Fikseerige mediaanide lõikepunkt ja uurige, millises suhtes see jaotab mediaani (menüü „Vaatlus", valik „Kaugus (. , .)").
- ❖ *Mitu kolmnurka on joonisel? Uurige, millised on neist võrdse pindalaga.* Kolmnurga pindala mõõtmiseks kasutage menüü „Vaatlus" valikut „Pindala (. , . , .)". Pärast vastava valiku sooritamist tuleb hiirega klõpsates näidata mõõdetava kolmnurga tipud.

Kustutage ekraan.

Kolmnurga kõrguseks nimetatakse kolmnurga tipust vastasküljele või selle pikendusele tõmmatud ristlõiku või selle pikkust [24].

Ülesanne 1.20.

Konstrueerige vaba kolmnurk *ABC* ja kõik selle kõrgused. Uurige kõrguste omadusi.

Juhised.

- ❖ Konstrueerige kolmnurga *ABC* kõrgused tema külgede ristsirgetena (menüü „Sõltuv objekt", valik „Ristsirge (. , _)").
- ❖ *Kuidas paiknevad üksteise suhtes sirged, millel asuvad kolmnurga kõrgused? Kas öeldu kehtib iga liiki kolmnurkade korral? Kus asub nende sirgete lõikepunkt erinevat liiki kolmnurkade korral?*
- ❖ *Millise kolmnurga kõik kõrgused on kolmnurga sisepiirkonnas, millise puhul mitte? Millise kolmnurga korral ühtivad kolmnurga kaks kõrgust kolmnurga külgedega?*

Puhastage ekraan.

1.2.7. Nurgapoolitaja, kolmnurga siseringjoon ja külgringjooned

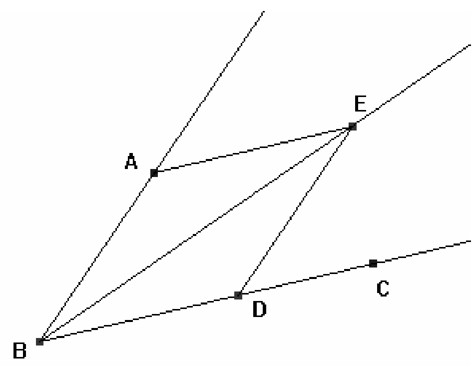
Nurgapoolitajaks nimetatakse kiirt, mis jaotab nurga kaheks võrdseks nurgaks [24].

Ülesanne 1.21.

Kasutamata menüü „Sõltuv objekt” valikut „Nurgapoolitaja (_ , _)”, konstrueerige antud nurga poolitaja.

Juhised.

- Valige ekraanil kolm vaba mitte ühel sirgel asuvat punkti *A*, *B* ja *C*. Joonestage kiired *BA* ja *BC* (näidake seejuures punkte õiges järjekorras).
- Joonestage ringjoon keskpunktiga *B* ja raadiusega *BA*. Fikseerige selle ringjoone ja kiire *BC* lõikepunkt *D* (menüü „Sõltuv objekt”, valik „Lõikepunkt (_ , o)”).
- Joonestage ringjooned raadiusega *BA* (menüü „Sõltuv objekt“, valik „Ringjoon (kp, ., .)“) keskpunktidega punktides *A* ja *D* ning fikseerige nende ringjoonte lõikepunktid (menüü „Sõltuv objekt”, valik „Lõikepunkt (o , o)”). Üks neist on punkt *B*, teine tähistage tähega *E*. Joonestage kiir *BE* ja peitke konstruktsiooni abijooned.
- Lohistage joonisel punkte *A*, *B* ja *C* ning veenduge mõõtmistega, et esitatud konstruktsiooniga saadud kiir *BE* on alati nurgapoolitaja (vt ka ül 1.22).
- Ühendage lõikudega punktid *A* ja *E* ning *D* ja *E* (vt joonis 1.3). *Mida võib öelda kolmnurkade ABE ja BDE kohta? Miks on kiir BE nurga ABC poolitaja?*



Joonis 1.3.

Salvestage joonis nimega yl_21.tri

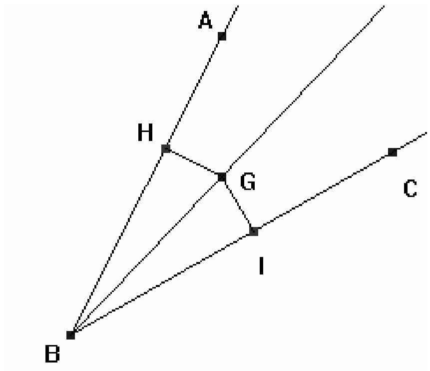
Ülesanne 1.22.

Selgitage nurgapoolitaja suvalise punkti omadus. Uurige selleks nurgapoolitaja suvalise punkti kaugust nurga haaradest[1]. (Kasutage faili yl_21.tri, vt ül 1.21)

[1] Punkti kaugus sirgest on sellest punktist sirgele joonestatud ristlõigu pikkus.

Juhised.

- ❖ Avage fail yl_21.tri. Peitke teile mittevajalikud lõigud *AE* ja *ED* ning punkt *E*.
- ❖ Kinnistage joonisel nurgapoolitajale vaba punkt *G*. Fikseerige punkti *G* ristprojektsioonid *H* ja *I* nurga *ABC* haaradel (vt joonis 1.4). Mõõtke vajalikud kaugused ja võrrelge neid lohistades nii lähtenurga haarasid kui ka punkti *G*.



Joonis 1.4.

- ❖ *Sõnastage nurgapoolitaja suvalise punkti omadus. Põhjendage see, kasutades kolmnurki BHG ja BGI.*
- ❖ Joonestage punktist *G* ringjoon raadiusega *GH*. *Mida võib öelda väljaspool ringjoont võetud punktist sellele ringjoonele joonestatud puutujalõikude pikkuste kohta? Põhjendage.*

Kustutage ekraan.

Kolmnurga siseringjoon on ringjoon, mis puutub kolmnurga kõiki külgi [1]. Seega selle keskpunkt on võrdsetel kaugustel kolmnurga kõikidest külgedest. **Kolmnurga nurgapoolitajaks** nimetatakse kolmnurga sisenurka poolitavat lõiku vaadeldava nurga tipust vastasküljeni [1].

Ülesanne 1.23.

Selgitage, kuidas leida kolmnurga siseringjoone keskpunkti.

Juhised.

- ❖ Joonestage vaba kolmnurk *ABC* ning kasutades menüü „Sõltuv objekt” valikut „Nurgapoolitaja (_ , _)” selle kolmnurga nurkade *A*, *B* ja *C* poolitajad. Valiku „Nurgapoolitaja (_ , _)” kasutamisel tuleb näidata nurga haarad suunaga vastupäeva.
- ❖ Kinnistage ühele nurgapoolitajatest vaba punkt *D*, leidke selle punkti ristprojektsioonid kolmnurga kõikidel külgedel ning mõõtke punkti *D* kaugused kolmnurga külgedest.

- ❖ Lohistage punkti *D* nurgapoolitajal. *Millises punktis on punkti D kaugus kõigist kolmnurga külgedest võrdne, miks? Kus asub kolmnurga siseringjoone keskpunkt?*

Salvestage joonis nimega yl_23.tri

<u>Ülesanne 1.24.</u>

Konstrueerige vaba kolmnurga *ABC* siseringjoon. (Kasutage joonist yl_23.tri)

<u>Juhised.</u>

- ❖ Fikseerige nurgapoolitajate (vt eelmise ülesande juhiseid) lõikepunkt ja selle ristprojektsioon kolmnurga ühel küljel (valik „Lõikepunkt (_ , _)”). Nende punktide abil saate soovitud ringjoone (valik „Ringjoon (kp, .)”). Peitke kõik konstruktsiooni abijooned ning ühendage lõiguga saadud ringjoone keskpunkt ja selle projektsioon kolmnurga küljel.
- ❖ Veenduge lähtekolmnurka lohistades, et olete tõesti saanud selle kolmnurga siseringjoone.
- ❖ Lohistage nüüd kolmnurga üks tipp üle kahe ülejäänud tipu poolt määratud lõigu. *Mis juhtub kolmnurga siseringjoonega?* Uurige, kuidas paikneb konstrueeritud ringjoon lähtekolmnurga külgede suhtes. Täiendage selleks joonist sirgetega *AB*, *BC* ja *CA* ning fikseerige selle ringjoone puutepunktid (valik „Lõikepunkt (_ , o)”) kolmnurga kahe külje pikendustega. Olete saanud **kolmnurga külgringjoone**.

Kustutage ekraan.

Kolmnurga külgringjooneks nimetatakse ringjoont, mis puutub vaadeldava kolmnurga üht külge ja kahe teise külje pikendusi [1].

Kõrvunurkadeks nimetatakse kahte nurka, millel on üks ühine haar ja mille teised haarad moodustavad sirge [24].

<u>Ülesanne 1.25.</u>

Uurige kõrvunurkade poolitajate omadusi.

Juhised.

- ❖ Konstrueerige teineteise kõrvunurgad ja mõõtke nende nurkade poolitajate vaheline nurk. *Mis selgub?* Kontrollige oma oletust joonist lohistades. *Kuidas paiknevad teineteise suhtes kõrvunurkade poolitajad, miks?*

Kustutage ekraan.

Kolmnurga välisnurgaks nimetatakse sisenurga kõrvunurka [1]. **Kolmnurga välisnurga poolitajaks** nimetatakse kolmnurga välisnurka poolitavat kiirt, otspunktiga nurga tipus [1].

Ülesanne 1.26.

Uurige kolmnurga välisnurkade poolitajate omadusi.

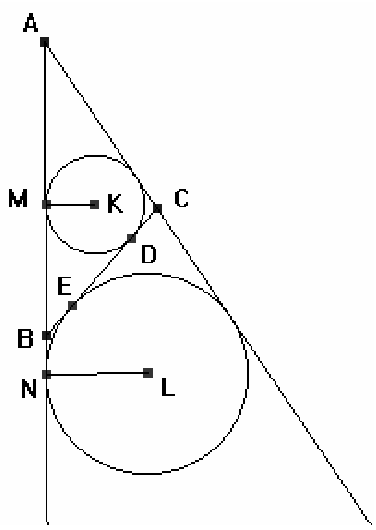
Juhised.

- ❖ Asetage ekraanile kolm vaba ühel sirgel mitteasuvat punkti *A*, *B* ja *C*. Joonestage sirged *AB*, *BC* ja *CA*.
- ❖ Joonestage kolmnurga *ABC* sise- ja välisnurkade poolitajad ja tooge need joonisel erinevalt esile (menüü „Redaktor”, valik „Värvi/laadi muutmine”).
- ❖ Uurige joonist, lohistades punkte *A*, *B* ja *C*. Püüdke joonist lohistada ka nii, et kolmnurga *ABC* sisenurga poolitajatest saaksid välisnurkade poolitajad ja vastupidi. *1) Kuidas asetsevad teineteise suhtes kolmnurga ühe tipu juures olevad sise- ja välisnurga poolitajad? Põhjendage. 2) Millise kujundi moodustavad kolmnurga välisnurkade poolitajad? 3) Mida võib öelda saadud kujundi kõrguste ja lähtekolmnurga sisenurkade poolitajate kohta? Tõestage oma hüpotees.*

Kustutage ekraan.

Ülesanne 1.27.

Kolmnurga *ABC* siseringjoon ja külgringjoon puutuvad kolmnurga küljega *BC* vastavalt punktides *D* ja *E* (vt joonis 1.5). Võrrelge lõikude *BE*, *DC* ja *KM* pikkusi ja nende pikkuste vahelisi seoseid sõltuvalt nurga *ACB* suurusest.



Joonis 1.5.

Juhised.

- Valige ekraanil vabad punktid *A*, *B* ja *C*. Joonestage kiired *AB* ja *AC* ning lõik *BC*. Ringjoonte joonestamisel fikseerige nende keskpunktid ja viimaste ristprojektsioonid.
- Peitnud konstruktsiooni abijooned (menüü „Redaktor”), mõõtke lõigud *DC*, *EB* ja *KM* nurk *ABC* (menüü „Vaatlus”).

Salvestage joonis nimega yl_27.tri

Ülesanne 1.28.

Toetudes eelmise ülesande joonisele (vt fail yl_27.tri), uurige, kuidas on seotud täisnurkse kolmnurga hüpotenuusile toetuva külgringjoone raadius ja selle kolmnurga ümbermõõt. Sõnastage ja tõestage saadud hüpotees.

Juhised.

- Ümbermõõdu mõõtmisel kasutage menüü „Vaatlus” valikut „Kauguste summa (. , .)”.

Ülesanne 1.29.

Kolmnurga *ABC* nurga *B* poolitaja lõikab kolmnurga ümberringjoont punktis *M*. Kolmnurga siseringjoone keskpunkt on punktis *O* ja küljele *AC* toetuva külgringjoone keskpunkt punktis *P*. Tehke vastav joonis. Uurige punktide *A*, *O*, *P* ja *C* paiknemist. Sõnastage saadud hüpotees.

1.3. Geomeetrilised kohad ehk lookused

Termin *locus* tuleb ladina keelest ja tähendab „kohta”. Sama mõiste tähistamiseks on erinevates keeltes kasutatud erinevaid termineid: *geometrical locus* või lihtsalt *locus* (ingl. k. - „geomeetriline lookus” või lihtsalt „lookus”), *геометрическое место точек* (vene k. - „punktide geomeetriline koht”), *geometrische Ort* (sks. k. - „geomeetriline koht”), *die Ortslinie* (sks. k. – „kohajoon“) jt.

Mõistet „lookus” on defineeritud erinevates allikates erinevalt.

Punktide **lookuseks** (ehk punktide geomeetriliseks kohaks) nimetatakse punktide hulka, kus iga punkt omab defineeritud geomeetrilist omadust antud geomeetrilise kujundi suhtes [30].

Lookuseks (ehk geomeetriliseks kohaks) nimetatakse teatavat tingimust rahuldavate punktide hulka tasandil [1].

Geomeetriline lookus (või lihtsalt **lookus**) on kõikide punktide hulk, mis rahuldavad teatavaid antud tingimusi [2].

Viimased kaks definitsiooni defineerivad „lookuse“ erinevalt - esimene tasandil, teine ruumis. Käesolevas töös piirdume lookuste uurimisega tasandil.

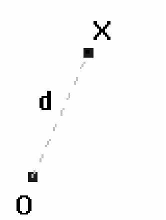
Programm GeomeTricks võimaldab meil vaadelda lookusi. Selleks tuleb valida menüüst „Vaatlus” valik „Punkti jälje konstrueerimine (.)”. Edaspidi kasutame töö tekstis termineid „lookus” ja „punkti jälg”[2] sünonüümidena.

Punktide lookus moodustab tavaliselt pideva kujundi või kujundid [15].

Järgnevas toome ülesannetena formuleeritult mõningate lookuste näiteid. Iga ülesanne on illustreeritud joonisega, millelt puudub otsitav lookus. Lugeja saab lookuse ise tekitada programmi GeomeTricksi abil, kui avab ülesande teksti lõpus nimetatud faili[3] (vt LISA 1). Ideed ülesannete koostamiseks on saadud kasutatud kirjanduse loetelu allikatest [2, 4, 9, 16-20]. Vastavad konstruktsioonid programmis GeomeTricks ja ülesannete lahendused ning põhjendused on koostanud töö autor.

<u>Ülesanne 1.30.</u>

Olgu antud tasandil vaba punkt *O*. Leidke tasandi kõigi selliste punktide *X* hulk (so lookus), mille punktid asuvad punktist *O* fikseeritud kaugusel *d* (vt joonis 1.6). Kuidas nimetatakse saadud joont? Defineerige saadud joon kui lookus.



Joonis 1.6.

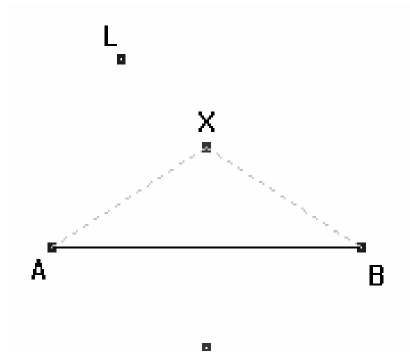
Avage fail yl_30.tri. Punkti jälje ehk lookuse saamiseks lohistage punkti *X* ja kontrollige, kas lookuse punktide tingimus on täidetud.

[2] Loomulikult ei mõista me lookuse all suvalise vaba punkti jälge.
[3] Joonise detailset konstruktsiooni saab näha, kui kasutada menüü „Redaktor” valikut „Peidetud objektide näitamine”.

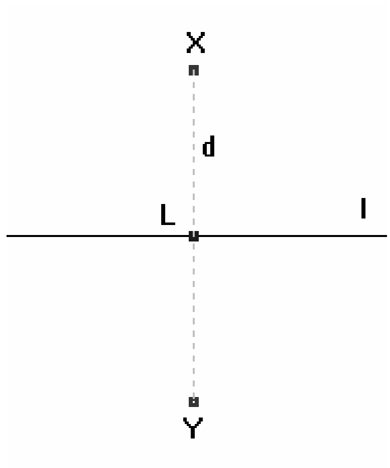
Ülesanne 1.31.

Olgu antud tasandil lõik *AB*. Leidke tasandi selliste punktide *X* hulk, mille punktid asuvad lõigu *AB* otspunktidest võrdsel kaugusel (*AX*=*BX*, vt joonis 1.7). Kuidas nimetatakse saadud joont? Defineerige saadud joon kui lookus.

Avage fail yl_31.tri. Lohistage punkti *L* ja kontrollige, kas antud lookuse punktide tingimused on täidetud. Leidke punkti *L* selline asend, mille korral jälge ei teki.



Joonis 1.7.



Joonis 1.8.

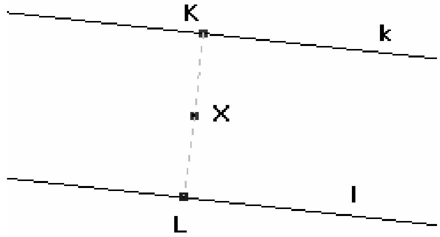
Ülesanne 1.32.

Olgu antud tasandil sirge *l*. Leidke tasandi selliste punktide *X* ja *Y* hulk, mille punktid asuvad antud sirgest võrdsel kaugusel *d* (*LX*=*LY*; vt joonis 1.8). Kuidas nimetatakse saadud jooni ja kuidas need asetsevad antud sirge suhtes? Defineerige saadud jooned kui lookus.

Avage fail yl_32.tri. Lohistage punkti *L* ja kontrollige, kas antud lookuse punktide tingimused on täidetud.

Ülesanne 1.33.

Olgu tasandil antud kaks paralleelset sirget *k* ja *l*. Leidke tasandil sirgete *k* ja *l* poolt määratud selliste punktide *X* hulk, mille punktid asuvad mõlemast antud sirgest võrdsetel kaugustel (*XL*=*XK*; vt joonis 1.9). Saadud joont



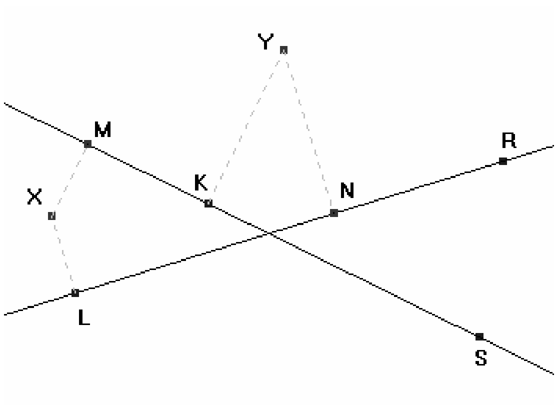
Joonis 1.9.

nimetatakse sirgetega *k* ja *l* määratud **riba keskparalleeliks.** Defineerige saadud joon kui lookus.

Avage fail yl_33.tri. Lohistage punkti *L* ja kontrollige, kas antud lookuse punktide tingimused on täidetud.

Ülesanne 1.34.

Olgu tasandil antud kaks lõikuvat sirget. Leidke tasandi selliste punktide *X* ja *Y* hulk, mille punktid asuvad võrdsetel kaugustel antud sirgete poolt tekitatud nurkade haaradest (*XL=XM* ja *YK=YN*; vt joonis 1.10). Kuidas nimetatakse saadud jooni ja kuidas need asetsevad teineteise suhtes? Defineerige saadud jooned lookusena.

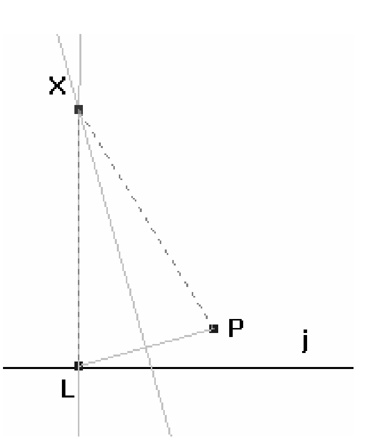


Joonis 1.10.

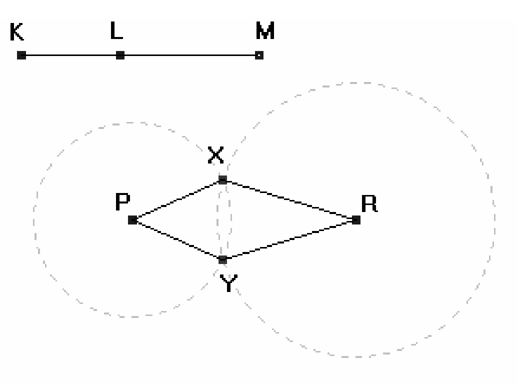
Avage fail yl_34.tri. Lohistage punkte *A* ja *B* (pole joonisel näha) ning kontrollige, kas antud lookuse punktide tingimused on täidetud (vt ka ül 1.22). Lohistades sirgete punkte *R* ja *S*, saate muuta sirgete vahelist nurka.

Ülesanne 1.35.

Olgu tasandil antud punkt *P* ja sirge *j*. Leidke tasandi selliste punktide *X* hulk, mis asuvad võrdsetel kaugustel antud punktist *P* ja sirgest *j* (*LX=PX*; vt joonis 1.11). Kuidas



Joonis 1.11.



Joonis 1.12.

nimetatakse saadud joont? Defineerige saadud joon lookusena.

Avage fail yl_35.tri. Lohistage punkti *L* mööda sirget *j* ja kontrollige, kas antud lookuse tingimused on täidetud.

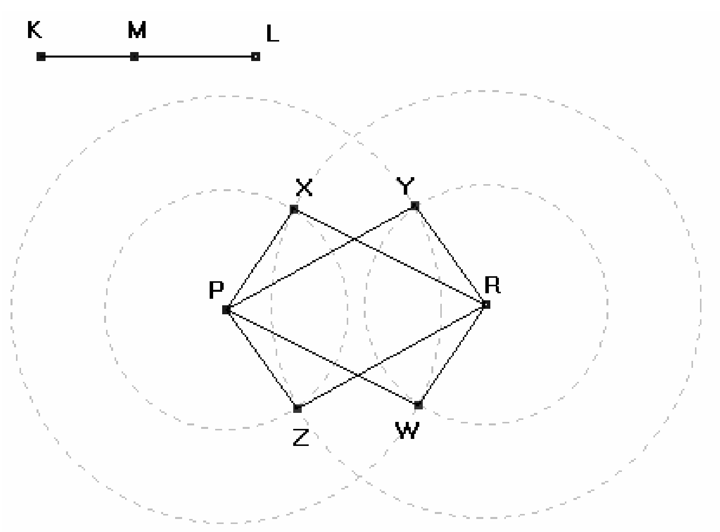
Ülesanne 1.36.

Olgu antud vaba lõik *KM* ja sellele kuuluv punkt *L*. Kahe vaba punkti *P* ja *R* abil on konstrueeritud tasandil nelinurk *PXRY* nii, et *PX=PY=KL* ja *RX=RY=LM* (vt joonis 1.12). Uurige, millise jälje jätavad selle nelinurga tipud *X* ja *Y*, kui lohistada punkti *L* lõigul *KM*. Saadud joont nimetatakse **ellipsiks.** Mida võib öelda saadud joone mistahes punkti kauguste summa kohta fikseeritud punktidest (fookustest) *P* ja *R*? Defineerige ellips kui lookus.

Avage fail yl_36.tri. Lohistage punkti *L* ja kontrollige, kas antud lookuse tingimused on täidetud. Nihutage ka lõigu *KM* otspunkte, punkte *P* ja *R* ning vaadelge, kuidas lookuse kuju muutub.

Ülesanne 1.37.

Olgu antud vaba lõik *KM* ja selle pikendusele kuuluv punkt *L*. Kahe vaba punkti *P* ja *R* abil on tasandil konstrueeritud kaks nelinurka *PYRW* ja *PXRZ* nii, et *PX=PZ=RY=RW=ML* ja *PY=PW=RX=RZ=KL* (vt joonis 1.13). Uurige, millise jälje jätavad nende nelinurkade tipud *X*, *Y*, *Z* ja *W,* kui lohistada punkti *L* lõigu *KM* pikendusel. Saadud joont nimetatakse **hüperbooliks**. Mida võib öelda saadud joone mistahes punkti kauguste vahe kohta fikseeritud punktidest (fookustest) *P* ja *R*? Defineerige hüperbool kui lookus. Avage fail yl_37.tri. Lohistage punkti *L* ja



Joonis 1.13.

kontrollige, kas antud lookuse tingimused on täidetud. Nihutage ka lõigu *KM* otspunkte, punkte *P* ja *R* ning vaadelge, kuidas lookuse kuju muutub.

<u>Ülesanne 1.38.</u>

Olgu tasandil antud ringjoon keskpunktiga *O* ja vaba punkt *K*. Leidke lõigu *KL* keskpunkti poolt moodustatud lookus punkti *L* vabal libisemisel mööda ringjoont.

Avage fail yl_38.tri. Vaadelge kolme erinevat juhtu, kui punkt *K* asub

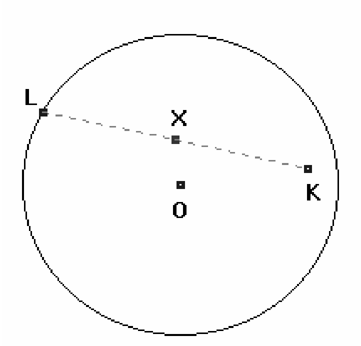
1) ringjoone sisepiirkonnas (vt joonis 1.14);
2) ringjoonel;
3) väljaspool ringjoont.

Milline joon tekib? Miks?

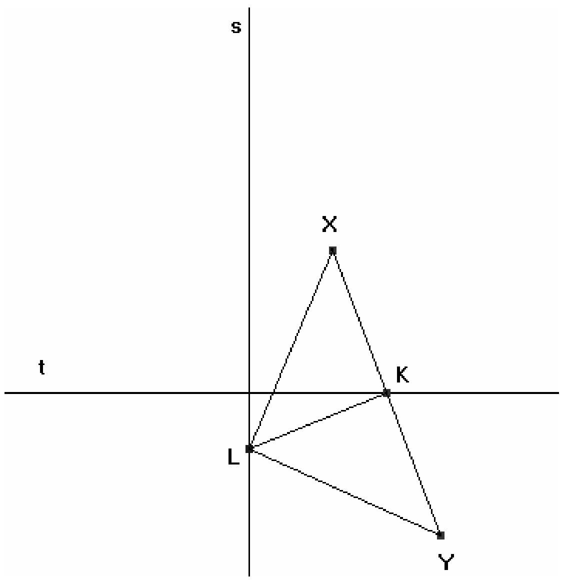
<u>Ülesanne 1.39.</u>

Olgu tasandil antud kaks ristuvat sirget *s* ja *t* ning fikseeritud kaateti pikkusega võrdhaarne täisnurkne kolmnurk *LXY*. Täisnurga tipp *L* ja hüpotenuusile konstrueeritud kõrguse aluspunkt *K* liiguvad vabalt mööda teineteisega ristuvaid sirgeid (vt joonis 1.15). Leidke *st*-tasandil täisnurkse kolmnurga *LXY* teravnurga tippude poolt moodustatud lookus, kui punkt *L* libiseb mööda sirget *s*. Kirjeldage saadud joont.

Avage fail yl_39.tri. Kontrollige, kas antud lookuse tingimused on täidetud. Kolmnurga kaatetite pikkust saate muuta lõigu *AB* abil (pole joonisel näha), lohistades selle otspunkti.



Joonis 1.14.



Joonis 1.15.

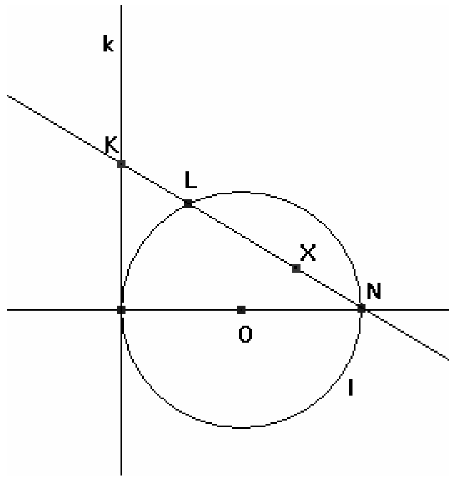
Ülesanne 1.40.

Lahendage eelmine ülesanne juhul, kui kolmnurga *LXY* (võrdhaarne täisnurkne) kõrguste aluspunkti *K* asukoht sirgel on fikseeritud, kolmnurga kaatetite pikkused aga võivad vabalt muutuda (vt joonis 1.15). Leidke täisnurkse kolmnurga *LXY* teravnurga tippude poolt *st*-tasandil moodustatud lookus, kui punkt *L* libiseb mööda sirget *s*. Mis joon(ed) on lookuseks ja miks?

Avage fail yl_40.tri. Lohistage punkti *L* ja kontrollige, kas antud lookuse tingimused on täidetud.

Ülesanne 1.41.

Olgu tasandil antud kaks suvalist joont *l* ja *k* ning fikseeritud punkt *N*. Punkti *N* läbiv sirge lõikab joont *l* punktis *L* ja joont *k* punktis *K* . Selliste tasandi punktide *X* ($X \in LK$) hulk, mille korral *LK*=*NX* ja $\vec{LK} \uparrow\uparrow \vec{NX}$ [4], on joon, mida nimetatakse joonte *l* ja *k* **tsissoidiks** (mõnes kirjanduses ka **kissoidiks**) [8, 25, 27].



Joonis 1.16.

Vaadelge tsissoidi erijuhtu, kus joon *k* on sirge ja joon *l* on ringjoon keskpunktiga *O* (vt joonis 1.16). Asugu fikseeritud punkt *N* ringjoonel.

Avage fail yl_41.tri. Lohistage punkti *L* ja kirjeldage tekkivat tsissoidi, kui

1) sirge *k* lõikab ringjoont;
2) sirge *k* on ringjoone puutuja;
3) sirge *k* ei lõika ega puutu ringjoont.

Avage fail yl_41.tri. Lohistage punkti *L* ja tekitage tsissoid. Tsissoidi, mille korral punkt *N* on puutepunkti vastaspunkt (vt joonis 1.16), nimetatakse **Dioklese tsissoidiks**, ülejäänud juhtudel **kaldtsissoidiks** [8, 25, 27].

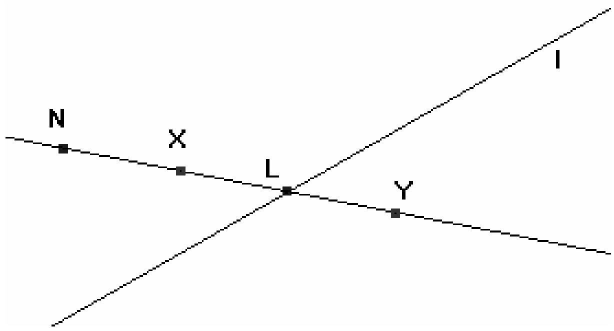
Ringjoone asukohta saate muuta lohistades punkti *O*.

---

[4] Kui nõuda ainult, et *LK*=*NX*, siis genereeritake punkti *N* suhtes punktiga *X* sümmeetriline punkt. Seega tekib kaks sümmeetrilist tsissoidi. Selle välistamiseks on vajalik tingimus $\vec{LK} \uparrow\uparrow \vec{NX}$ [8].

Ülesanne 1.42.

Olgu tasandil antud mingi joon *l* ja fikseeritud punkt *N*. Läbi punkti *N* on tõmmatud sirge, mis lõikab joont *l* punktis *L*. Leidke punktide *X* ja *Y* ($X, Y \in NL$) hulk, mille korral lõigud *XL=LY=const*. Saadud joont nimetatakse **konhoidiks** [9, 28].



Joonis 1.17.

Olgu meil antud joon *l* sirge. Sellisel juhul nimetatakse kahest harust koosnevat lookust **sirge konhoidiks** ehk **Nikomedese konhoidiks** (vt joonis 1.17).

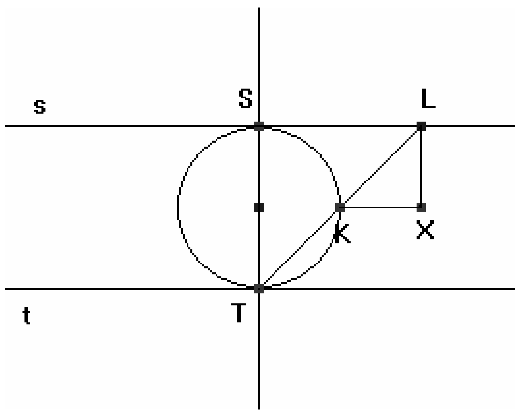
Avage fail yl_42.tri. Tekitage konhoid, kui punkt *N*

1) ei kuulu lõigule *XY*;
2) ühtib lõigu otspunktiga;
3) asub lõigul *XY*.

Antud sirgete vahelist nurka saate muuta, kui lohistate punkti *N*.

Ülesanne 1.43.

Olgu meil fikseeritud raadiusega ringjoon ning sirged *s* ja *t* selle ringjoone paralleelsed puutujad (vt jooni 1.18). Ringjoone ja sirge *t* puutepunktist *T* lähtuv kiir lõikab ringjoont suvalises punktis *K* ja sirget *s* punktis *L*. Konstrueerige punkt *X* selliselt, et lõik $KX \parallel s$ ja $LX \perp s$. Tipu *L* lohistamisel mööda sirget *s* saadud punkti *X* jälg kannab nimetust **Agnesi lokk**. Konstrueerige joonis ja Agnesi lokk.



Joonis 1.18.

Juhised.

❖ Konstrueerige fikseeritud raadiusega ringjoon ja kinnitage sellele vaba punkt.

- Konstrueerige sirge, mis läbib ringjoone keskpunkti ja vaba punkti. Fikseerige ringjoone ja sirge lõikepunktid, tähistades need tähtedega *S* ja *T*.
- Konstrueerige ringjoonele kaks paralleelset puutujat *s* ja *t* (ühtlasi sirge *ST* ristsirged) vastavate puutepunktidega *S* ja *T*.
- Kinnitage ringjoonele vaba punkt *K*. Konstrueerige punktist *T* läbi punkti *K* kiir. Fikseerige kiire ja sirge *s* lõikepunkt *L*.
- Konstrueerige sirge *s* ristsirge, mis läbib punkti *L* ning sirgega *t* paralleelne sirge, mis läbib punkti *K*. Fikseerige viimaste joonte lõikepunkt ja tähistage see tähega *X*.
- Peitke sirged *KX* ja *LX* ning konstrueerige nende asemele sirglõigud.
- Leidke punkti *X* jälg.

2. Kolmnurga tähtsamate joonelementide lõikepunkti poolt tekitatav jälg

2.1. Kolmnurga ühe tipu vabal lohistamisel tekkiv jälg

Uurime järgnevas, millise jälje jätab kolmnurga ühe tipu vabal[5] lohistamisel kolmnurga külgede keskristsirgete, nurgapoolitajate, mediaanide ja kõrguste lõikepunkt.

2.1.1. Kolmnurga külgede keskristsirgete lõikepunkti poolt tekitatav jälg

Uurime, millise jälje jätab kolmnurga *ABC* külgede keskristsirgete lõikepunkt *K* kolmnurga tipu *C* vabal lohistamisel.

- ❖ Joonestage kolmnurk *ABC* ja selle külgede keskristsirged.
- ❖ Fikseerige keskristsirgete lõikepunkt ja tähistage see tähega *K*.
- ❖ Konstrueerige kolmnurga *ABC* tipu *C* vabal lohistamisel saadav punkti *K* jälg (menüü „Vaatlus", valik „Punkti jälje konstrueerimine").

<u>Ülesanne 2.1.</u>

Millise jälje jätab punkt *K*? Põhjendage. Millal asub jälje punkt küljel *AB*?

2.1.2. Kolmnurga nurgapoolitajate lõikepunkti poolt tekitatav jälg

Uurime, millise jälje jätab kolmnurga *ABC* nurgapoolitajate lõikepunkt *N* kolmnurga tipu *C* vabal lohistamisel.

- ❖ Joonestage kolmnurk *ABC* ja selle nurgapoolitajad. Uurige tipu *C* vabal lohistamisel tekkivat nurgapoolitajate lõikepunkti *N* jälge.

<u>Ülesanne 2.2.</u>

Kas leidub mingi tasandi piirkond, millest ei välju punkti *N* jälje punktid? Kui jah, siis milline piirkond? Põhjendage.

---

[5] Kolmurga ühe tipu lohistamisel ei tohi üldjuhul siin ja edaspidi kolmnurga tippude orientatsioon muutuda.

2.1.3. Kolmnurga mediaanide lõikepunkti poolt tekitatav jälg

Uurime, millise jälje jätab kolmnurga *ABC* mediaanide lõikepunkt *M* kolmnurga tipu *C* vabal lohistamisel.

- ❖ Joonestage kolmnurk *ABC* ja selle mediaanid. Uurige tipu *C* vabal lohistamisel tekkivat mediaanide lõikepunkti *M* jälge.

Ülesanne 2.3.

Uurige, millisesse tasandi piirkonda kuuluvad mediaanide lõikepunkti *M* poolt tekitatud jälje punktid? Põhjendage.

2.1.4. Kolmnurga kõrguste lõikepunkti poolt tekitatav jälg

Uurime, millise jälje jätab kolmnurga *ABC* kõrguste lõikepunkt *H* kolmnurga tipu *C* vabal lohistamisel.

- ❖ Joonestage kolmnurk *ABC* ja selle kõrgused. Uurige tipu *C* vabal lohistamisel tekkivat kõrguste lõikepunkti *H* jälge.

Ülesanne 2.4.

Uurige, millisesse tasandi piirkonda kuuluvad kõrguste lõikepunkti *H* poolt tekitatud jälje punktid? Vaadelge eraldi juhte, kus kolmnurk *ABC* on

1) täisnurkne;
2) teravnurkne;
3) nürinurkne.

Põhjendage.

2.2. Kolmnurga ühe tipu lohistamisel mööda sirget tekkiv jälg

Eelmises punktis 2.1 lohistasime kolmnurga tippu suvaliselt. Vaatleme nüüd juhtu, kui kolmnurga *ABC* tippu *C* lohistada mööda sirget *l*.

Etteantud joont, mida mööda lohistame kolmnurga üht tippu, nimetame edaspidi **juhtjooneks.**

Antud punktis 2.2 on juhtjooneks sirge *l*. Piirdume järgnevalt selliste olukordade uurimisega, kus kolmnurga tipud *A* ja *B* jäävad ühele poole juhtjoont või üks neist tippudest asub juhtjoonel. Meenutame veel, et jälje konstrueerime nii, et kolmnurga tippude orientatsioon ei muutu.

2.2.1. Kolmnurga külgede keskristsirgete lõikepunkti poolt tekitatav jälg

Uurime, millise jälje jätab kolmnurga *ABC* külgede keskristsirgete lõikepunkt *K* kolmnurga tipu *C* lohistamisel mööda sirget *l*.

- ❖ Joonestage kolmnurk *ABC* ja selle külgede keskristsirged.
- ❖ Fikseerige keskristsirgete lõikepunkt ja tähistage see tähega *K*.
- ❖ Konstrueerige määratud sirge *l* (menüü „Sõltumatu objekt", valik „Määratud sirge") ning kinnitage sellele vaba punkt (kolmnurga tipp) *C*.
- ❖ Konstrueerige kolmnurga *ABC* tipu *C* lohistamisel mööda sirget saadav punkti *K* jälg (menüü „Vaatlus", valik "Punkti jälje konstrueerimine").

<u>Ülesanne 2.5.</u>

Millise jälje jätab kolmnurga külgede keskristsirgete lõikepunkt *K*, kui kolmnurga tipud *A* ja *B* asuvad ühel pool juhtjoont *l*? Uurige jälje ja kolmnurga külje *AB* vastastikust asendit järgmistel juhtudel:

1) kolmnurga nurk *ACB* jääb tipu *C* nihutamisel alati teravnurgaks;
2) kolmnurga nurk *ACB* saab tipu *C* nihutamisel maksimaalseks suuruseks 90°;
3) kolmnurga nurk *ACB* muutub tipu *C* nihutamisel ka nürinurgaks.

Põhjendage. Kirjeldage jälje „otspunkti" asendit.

<u>Ülesanne 2.6.</u>

Millise jälje jätab punkt *K*, kui üks kolmnurga tippudest *A* või *B* asub juhtjoonel *l*? Selgitage, miks. Kirjeldage jälje „otspunkti" asendit.

2.2.2. Kolmnurga nurgapoolitajate lõikepunkti poolt tekitatav jälg

Uurime, millise jälje jätab kolmnurga *ABC* nurgapoolitajate lõikepunkt *N* kolmnurga tipu *C* lohistamisel mööda sirget *l*.

- ❖ Joonestage kolmnurk *ABC* ja selle nurgapoolitajad ning määratud sirge *l*.
- ❖ Kinnitage tipp *C* sirgele *l*. Uurige tipu *C* lohistamisel mööda sirget *l* tekkivat nurgapoolitajate lõikepunkti *N* jälge.

<u>Ülesanne 2.7.</u>

Millise jälje jätab kolmnurga nurgapoolitajate lõikepunkt *N*, kui tipud *A* ja *B* asuvad ühel pool sirget *l*? Tekitage jälg ka erijuhtudel, kui kolmnurga

1) külg *AB* on paralleelne juhtjoonega;
2) külje *AB* pikendus on risti juhtjoonega.

<u>Ülesanne 2.8.</u>

Millise jälje jätab punkt *N*, kui lisaks tipule *C* asub ka tipp *B* sirgel *l*? Kirjeldage jälje punktide piirseise („otspunkte”). Põhjendage.

<u>Ülesanne 2.9.</u>

Uurige ülesandeid 2.7 ja 2.8, kui lisaks sisenurkade poolitajate lõikepunktile *N* tekitavad jälge ka välisnurkade poolitajate lõikepunktid (paarikaupa lõikuvad). Konstrueerige jäljed, lastes kolmnurga tippude orientatsioonil muutuda.

2.2.3. Kolmnurga mediaanide lõikepunkti poolt tekitatav jälg

Uurime, millise jälje jätab kolmnurga *ABC* mediaanide lõikepunkt *M* kolmnurga tipu *C* lohistamisel mööda sirget *l*.

- ❖ Joonestage kolmnurk *ABC* ja selle mediaanid ning määratud sirge *l*.
- ❖ Kinnitage tipp *C* sirgele *l*. Uurige tipu *C* lohistamisel mööda sirget *l* tekkivat mediaanide lõikepunkti *M* jälge.

<u>Ülesanne 2.10.</u>

Millise jälje jätab punkt *M*, kui tipud *A* ja *B* asuvad ühel pool sirget *l*? Uurige eraldi võimalusi, kus

1) $AB \parallel l$;
2) $AB \nparallel l$.

Põhjendage.

Ülesanne 2.11.

Millise jälje jätab punkt *M*, kui lisaks tipule *C* asub ka tipp *B* sirgel *l*? Põhjendage.

2.2.4. Kolmnurga kõrguste lõikepunkti poolt tekitatav jälg

Uurime, millise jälje jätab kolmnurga *ABC* kõrguste lõikepunkt *H* kolmnurga tipu *C* lohistamisel mööda sirget *l*. Olgu selle sirge võrrandiks $y = mx + q$.

❖ Joonestage kolmnurk *ABC* ja selle kõrgused ning määratud sirge *l*. Kinnitage tipp *C* sirgele. Uurige tipu *C* lohistamisel mööda sirget *l* tekkivat kõrguste lõikepunkti *H* jälge.

Ülesanne 2.12.

Millise jälje jätab kolmnurga *ABC* kõrguste lõikepunkt, kui kolmnurga tipp *C* libiseb vabalt mööda sirget *l*? Uurige järgmiseid variante:

1) juhtjoon *l* on risti küljega *AB* või selle pikendusega, kus
   i) $A, B \notin l$;
   ii) kas *A* või *B* asub sirgel *l*;
2) juhtjoon ei ole risti küljega *AB* või selle pikendusega, kus
   i) $A,\ B \notin 1$ (Uurige ka juhtjoone ja lookuse võimalikke vastastikuseid asendeid. Kirjeldage neid, kasutades küljele *AB* kui diameetrile joonestatud ringjoont.);
   ii) kas *A* või *B* asub sirgel *l*.

Ülesanne 2.13.

Leidke eelmises ülesandes saadud lookuse üldvõrrand. Valige selleks koordinaatteljestik nii, et kolmnurga tipp *A* asuks koordinaatide alguspunktis ja tipp *B* x-telje positiivsel suunal. Olgu juhtjoone võrrand $y = mx + q$.

Ülesanne 2.14.

Uurige saadud lookuse üldvõrrandit juhtjoone võrrandi järgmistel erijuhtudel:

1) $m=0$ ja $q\neq0$;
2) $m\neq0$ ja $q=0$;
3) $m\neq0$ ja $q\neq0$.

Tehke vastavad joonised. Kuidas asuvad igal erijuhul juhtjooned?

Ülesanne 2.15.

Kasutades eelmises ülesandes saadud võrrandit, leidke juhtjoone ja lookuse lõikepunktid. Vaadelge eraldi juhte, kus

1) juhtjoon on paralleelne kolmnurga küljega *AB*;
2) juhtjoon läbib kolmnurga tippu *A*;
3) juhtjoon on suvaline sirge.

2.3. Kolmnurga tipu lohistamisel mööda ringjoont tekkiv jälg

Käesolevas punktis uurime jälje tekkimist juhtudel, kui juhtjoonel asuvad kolmnurga kõik tipud, kaks tippu, vaid lohistatav tipp. Märgime, et juhtjooneks on nüüd ringjoon.

2.3.1. Kolmnurga külgede keskristsirgete lõikepunkti poolt tekitatav jälg

Uurige, millise jälje jätab kolmnurga *ABC* külgede keskristsirgete lõikepunkt *K* kolmnurga tipu *C* lohistamisel mööda ringjoont.

- ❖ Märkige vaba punkt (so juhtjoone keskpunkt) ja konstrueerige etteantud raadiusega *r* ringjoon (menüü „Sõltuv objekt”, valik „Ringjoon (kp, r)”).
- ❖ Joonestage kolmnurk *ABC* ja selle külgede keskristsirged. Fikseerige keskristsirgete lõikepunkt *K*.
- ❖ Kinnitage juhtjoonele (ülesandest sõltuvalt) vajalik arv kolmnurga tippe (menüü „Kinnistamine”, valik „Vaba punkt ringjoonele”).

Ülesanne 2.16.

Millise jälje jätab kolmnurga *ABC* külgede keskristsirgete lõikepunkt *K*, kui tipp *C* lohiseb vabalt mööda kolmnurga ümberringjoont? Põhjendage.

Ülesanne 2.17.

Millise jälje jätab kolmnurga *ABC* külgede keskristsirgete lõikepunkt *K*, kui tipp *C* lohiseb vabalt mööda ringjoont ja üks kolmnurga tippudest ei asu sellel ringjoonel? Uurige variante, kus

1) tipp *B* asub seespool ringjoont;
2) tipp *B* asub väljaspool ringjoont ja
   - kolmnurga külg *AB* lõikab ringjoont;
   - kolmnurga külg *AB* puutub ringjoont.

Põhjendage.

Milline on jälg, kui lubame kolmnurga tippude orientatsioonil muutuda?

<u>Ülesanne 2.18.</u>

Millise jälje jätab kolmnurga *ABC* külgede keskristsirgete lõikepunkt *K*, kui tipp *C* lohiseb vabalt mööda ringjoont ja kaks ülejäänud kolmnurga tippu ei asu sellel ringjoonel? Uurige eraldi variante, kui kolmnurga

1) tipud *A* ja *B* asuvad seespool juhtjoont;
2) üks tippudest asub seespool, teine väljaspool juhtjoont;
3) tipud *A* ja *B* asuvad väljaspool juhtjoont:
   - küljel *AB* on juhtjoonega üks ühine punkt;
   - küljel *AB* on juhtjoonega kaks ühist punkti;
   - küljel *AB* ole juhtjoonega ühiseid punkte.

Põhjendage.

Millised jäljed tekivad, kui lubame kolmnurga tippude orientatsioonil muutuda?

2.3.2. Kolmnurga nurgapoolitajate lõikepunkti poolt tekitatav jälg

Uurime, millise jälje jätab kolmnurga *ABC* nurgapoolitajate lõikepunkt *N* kolmnurga tipu *C* lohistamisel mööda ringjoont.

- ❖ Märkige vaba punkt ja konstrueerige etteantud raadiusega *r* ringjoon..
- ❖ Joonestage kolmnurk *ABC* ja selle nurgapoolitajad. Fikseerige nurgapoolitajate lõikepunkt *N*.
- ❖ Kinnitage juhtjoonele (ülesandest sõltuvalt) vajalik arv kolmnurga tippe.

<u>Ülesanne 2.19.</u>

Millise jälje jätab kolmnurga *ABC* nurgapoolitajate lõikepunkt *N*, kui tipp *C* lohiseb vabalt mööda kolmnurga ümberringjoont? Põhjendage.

Ülesanne 2.20.

Konstrueerige ülesande 2.19 põhjal nii kolmnurga sisenurkade poolitajate lõikepunkti N kui ka kolmnurga välisnurkade poolitajate lõikepunktide jäljed, lubades kolmnurga tippude orientatsioonil muutuda.

Ülesanne 2.21.

Konstrueerige kolmnurga ABC nurgapoolitajate lõikepunkti N jälg, kui tipp C lohiseb vabalt mööda juhtjoont ja üks kolmnurga tippudest ei asu sellel juhtjoonel. Millised on siin ringjoonele mittekuuluva punkti paiknemise oluliselt erinevad võimalused?

Ülesanne 2.22.

Konstrueerige ülesande 2.21 põhjal nii kolmnurga sisenurkade poolitajate lõikepunkti N kui ka kolmnurga välisnurkade poolitajate lõikepunktide jäljed, lubades kolmnurga tippude orientatsioonil muutuda.

Ülesanne 2.23.

Konstrueerige kolmnurga ABC nurgapoolitajate lõikepunkti N jälg, kui tipp C lohiseb vabalt mööda juhtjoont ja kaks kolmnurga tippu ei asu sellel juhtjoonel. Vaadelge eraldi järgmisi variante:

1) tipud A ja B asuvad seespool juhtjoont;
2) üks tippudest asub seespool, teine väljaspool juhtjoont;
3) tipud A ja B asuvad väljaspool juhtjoont:
   - küljel AB on juhtjoonega üks ühine punkt;
   - küljel AB on juhtjoonega kaks ühist punkti;
   - küljel AB ole juhtjoonega ühiseid punkte.

Ülesanne 2.24.

Konstrueerige ülesande 2.23 tingimustel nii kolmnurga sisenurkade poolitajate lõikepunkti N kui ka kolmnurga välisnurkade poolitajate lõikepunktide jäljed, lubades kolmnurga tippude orientatsioonil muutuda.

2.3.3. Kolmnurga mediaanide lõikepunkti poolt tekitatav jälg

Uurime, millise jälje jätab kolmnurga *ABC* mediaanide lõikepunkt *M* kolmnurga tipu *C* lohistamisel mööda ringjoont.

- ❖ Konstrueerige etteantud raadiusega *r* ringjoon, kolmnurk *ABC* ja selle mediaanid. Kinnitage vajalik arv kolmnurga tippe juhtjoonele.

<u>Ülesanne 2.25.</u>

Millise jälje jätab kolmnurga *ABC* mediaanide lõikepunkt *M*, kui tipp *C* lohiseb vabalt mööda kolmnurga ümberringjoont? Põhjendage.

<u>Ülesanne 2.26.</u>

Millise jälje jätab kolmnurga *ABC* mediaanide lõikepunkt *M*, kui tipp *C* lohiseb vabalt mööda ringjoont ja üks kolmnurga tippudest ei asu sellel ringjoonel? Põhjendage.

<u>Ülesanne 2.27.</u>

Kirjeldage, millise jälje jätab kolmnurga *ABC* mediaanide lõikepunkt *M*, kui tipp *C* lohiseb vabalt mööda juhtjoont ja kaks kolmnurga tippu ei asu sellel juhtjoonel? Kirjeldage eraldi järgmisi variante:

1) tipud *A* ja *B* asuvad seespool juhtjoont;
2) üks tippudest asub seespool, teine väljaspool juhtjoont;
3) tipud *A* ja *B* asuvad väljaspool juhtjoont:
    - küljel *AB* on juhtjoonega üks ühine punkt;
    - küljel *AB* on juhtjoonega kaks ühist punkti;
    - küljel *AB* ei ole juhtjoonega ühiseid punkte.

2.3.4. Kolmnurga kõrguste lõikepunkti pool tekitatav jälg

Uurime, millise jälje jätab kolmnurga *ABC* kõrguste lõikepunkt *H* kolmnurga tipu *C* lohistamisel mööda ringjoont.

- ❖ Konstrueerige etteantud raadiusega *r* ringjoon, kolmnurk *ABC* ja selle kõrgused. Kinnitage vajalik arv kolmnurga tippe juhtjoonele.

Ülesanne 2.28.

Millise jälje jätab kolmnurga *ABC* kõrguste lõikepunkt *H*, kui kolmnurga tipp *C* libiseb vabalt mööda kolmnurga ümberringjoont? Põhjendage miks.

Milline jälg tekib, kui kolmnurga tippude orientatsioon muutub?

Ülesanne 2.29.

Konstrueerige kolmnurga *ABC* kõrguste lõikepunkti *H* jälg, kui tipp *C* lohiseb vabalt mööda ringjoont ja üks kolmnurga tippudest ei asu sellel ringjoonel.

Milline jälg tekib, kui kolmnurga tippude orientatsioon muutub?

Ülesanne 2.30.

Konstrueerige kolmnurga *ABC* kõrguste lõikepunkti *H* jälg, kui tipp *C* lohiseb vabalt mööda juhtjoont ja kaks kolmnurga tippu ei asu sellel juhtjoonel. Vaadelge eraldi järgmisi variante:

1) tipud *A* ja *B* asuvad seespool juhtjoont;
2) üks tippudest asub seespool, teine väljaspool juhtjoont;
3) tipud *A* ja *B* asuvad väljaspool juhtjoont:
   - küljel *AB* on juhtjoonega üks ühine punkt;
   - küljel *AB* on juhtjoonega kaks ühist punkti;
   - küljel *AB* ole juhtjoonega ühiseid punkte.

Milline jälg tekib, kui kolmnurga tippude orientatsioon muutub?

3. Ülesandeid lookuste konstrueerimisele

Käesolev peatükk sisaldab erineva raskusastmega ülesandeid lookuste konstrueerimisele. Ülesanded võib liigitada kaheks. Peatüki esimeses osas on võimalik lookuseid leida ülesannetes nõutud konstruktsioonijuhiste abil. Peatüki teises osas leitakse otsitavad lookused definitsiooni rakendamise abil. Ülesannete ideed on saadud kasutatud kirjandusest [10, 13, 14, 21, 25, 29, 31].

<u>Ülesanne 3.1.</u>

Olgu antud kaks vaba punkti A ja B. Leidke lookus, mille punktid on punktist A kaks korda kaugemal kui punktist B. Leidke saadud lookuse võrrand. Millest ja kuidas sõltub jälje suurus?

<u>Ülesanne 3.2.</u>

Olgu antud täisnurk tipuga O ja lõik AB pikkusega a. Asugu lõigu otspunktid nurga kummalgi haaral. Leidke lõigu AB keskpunkti X lookus ja selle võrrand, kui lõigu otspunktid lohisevad vabalt mööda nurga haara.

<u>Ülesanne 3.3.</u>

Olgu antud täisnurk tipuga O ja täisnurkne kolmnurk ABC. Asugu kolmnurga ABC teravnurkade tipud A ja B täisnurga haaradel. Millise jälje jätab kolmnurga ABC täisnurkne tipp C, kui tippe B ja A vabalt lohistada mööda nurga haarasid? Põhjendage saadud hüpotees.

<u>Ülesanne 3.4.</u>

Olgu antud ringjoon ja punkt A. Punkti A läbiv sirge lõikab ringjoont punktides K ja L. Leidke nii saadud kõõlu keskpunkti poolt tekitatud jälg, kui punkt L liigub vabalt mööda ringjoont. Uurige juhte, kui punkt A asub

1) ringjoonel;
2) seespool ringjoont;
3) väljaspool ringjoont.

Ülesanne 3.5.

Olgu antud sirge *l* ja sellest ühelpool punktid *A* ja *B*. Leidke selliste ringjoonte keskpunktide lookus, mis läbivad punkte *A* ja *B* ning lõikavad sirget *l*. Uurige kahte juhtu, kui punktid *A* ja *B* asuvad

1) sirgega *l* paralleelsel sirgel;
2) sirgega *l* lõikuval sirgel.

Ülesanne 3.6.

Olgu antud nelinurk *ABCD*, mille vastasküljed on ühendatud lõikudega *KM* ja *LN*. Milline on nende lõikude keskpunktide lookus, kui punktid *K*, *M*, *L* ja *N* võivad vabalt liikuda mööda nelinurga külgi?

Ülesanne 3.7.

Olgu tasandil antud neli fikseeritud punkti *A, B, C* ja *D*. Asugu need punktid mingi ristküliku külgedel või küljepikendustel. Leidke kõikvõimalike selliste ristkülikute diagonaalide lõikepunktide *X* poolt tekitatav jälg. Põhjendage.

Ülesanne 3.8.

Asugu punkt *L* ringjoonel diameetriga *AB*. Konstrueerige ruut küljega *AL*. Leidke ruudu diagonaalide lõikepunkt ja tähistage see tähega *X*. Millise trajektoori jätab punkt *X* punkti *L* vabal liikumisel mööda ringjoont? Kuidas suhtuvad saadud lookuse ja lähteringjoone vastavate joonelementide pikkused? Põhjendage.

Ülesanne 3.9.

Olgu antud ringjoon ja selle ristuvad diameetrid *AC* ja *BD*. Olgu *L* suvaline ringjoonele kuuluv punkt. Lõik *LA* lõikub diameetriga *BD* või selle pikendusega punktis *E*. Punkti *E* läbib lõiguga *AC* paralleelne sirge, mis lõikub sirgega *LB* punktis *X*. Leidke punkti *X* jälg, kui punkt *L* lohiseb vabalt mööda ringjoont. Põhjendage.

Ülesanne 3.10.

Olgu antud punkt *A* ja sirge *l* ning suvaline punkt *L* sirgel. Olgu punkt *X* selline, et kolmnurk *ALX* on võrdkülgne kolmnurk. Leidke punkti *X* jälg punkti *L* lohistamisel mööda sirget *l*.

Ülesanne 3.11.

Olgu antud sirge ja sellel fikseeritud punktid *A, B* ja *C*. Olgu antud suvaline punkt *L*, mis ei kuulu antud sirgele. Läbi punkti *C* on tõmmatud sirged, mis on paralleelsed sirgetega *BL* ja *AL* ning nende lõikepunktid on tähistatud vastavalt tähtedega *P* ja *Q*. Tipust *C* on tõmmatud lõigule *PQ* ristsirge lõikepunktiga *X*. Leidke punkti *L* lohistades punkti *X* jälg. Põhjendage.

Ülesanne 3.12.

Olgu antud fikseeritud punktid *A* ja *B*. On teada, et kolmnurga *ABC* mediaan *AM* ja kõrgus *BN* on võrdsed. Leidke kõikvõimalike selliste kolmnurkade tipu *C* poolt moodustatud jälg. Kuidas on seotud kolmnurga külg *AB* ja saadud jälg? Põhjendage.

Ülesanne 3.13.

Olgu antud ringjoon ja mingi fikseeritud punkt *N*. Ringjoone punktist *L* on joonestatud ringjoonele puutuja. Punktist *N* on tõmmatud sellele puutujale ristsirge. Lõikugu ristsirge puutujaga punktis *X*. Punktide *X* hulka, mis tekib punkti *L* vabal lohistamisel mööda ringjoont, nimetatakse **Pascali teoks**. Kirjeldage Pascali tigu, kui

1) punkt *N* asub väljaspool ringjoont;
2) punkt *N* asub ringjoonel;
3) punkt *N* asub seespool ringjoont.

Ülesanne 3.14.

Olgu antud ringjoon keskpunktiga *O* ja seespool ringjoont vaba punkt *A*. Konstrueerige selliste punktide *X* hulk, mille punktid asuvad võrdsetel kaugustel punktist *A* ja ringjoonest[6]. Mis jooneks osutub jälg? Miks?

Ülesanne 3.15.

Lahendage eelmine ülesanne juhul, kui punkt *A* asub ringjoonel.

Ülesanne 3.16.

Lahendage ülesanne 3.14 juhul, kui punkt *A* asub väljaspool ringjoont. Mida huvitavat selgub lõikude *AX* ja *OX* pikkustega seonduvalt? Millega on võrdne nende lõikude pikkuste vahe? Põhjendage saadud hüpotees. Mis jooneks osutub jälg? Miks?

[6] Punkti kauguseks ringjoonest nimetatakse lühimat kaugust sellest punktist ringjooneni.

Ülesanne 3.17.

Joonestage ruut *ABCD* ning ristkülik *ALMX.* Vaba punkt *L* on kinnistatud ruudu küljele *DC* või selle pikendusele ning ristküliku külg *XM* või selle pikendus läbib ruudu tippu *B*.

1) Millise jälje jätab punkt *X* punkti *L* liikumisel mööda sirget *DC*? Miks?
2) Mida võib öelda ruudu *ABCD* ja ristküliku *AXML* pindalade kohta? Põhjendage oma hüpotees.
3) Mida võib öelda lõikude *AX* ja *XM* pikkuste korrutise kohta? Miks?

Ülesanne 3.18.

Cassini ovaaliks nimetatakse selliste punktide hulka, mille kauguste korrutis tasandi kahest etteantud punktist (fookused) on konstantne.

Kasutades eelmise ülesande joonist, konstrueerige Cassini ovaal. Uurige Cassini ovaali kuju sõltuvalt fookustevahelisest kaugusest. Millest ja kuidas selle kuju sõltub? Andke tulemus tabelina, mille ühes veerus on seosed ja teises neile vastav Cassini ovaali kuju (ilma konstruktsiooni joonteta).

Ülesanne 3.19.

Konstrueerige ringjoone konhoid (vt ptk I ül 1.42). Olgu fikseeritud punkti *N* kaugus juhtjoonest *k*, juhtjoone diameeter *d* ja $XL=YL=r$. Uurige konhoidi kuju kolmel järgmisel erijuhul ning kandke saadud lookused (ilma konstruktsiooni joonteta) vastavalt tabelitesse 1-3 (vt LISA 1 failid tabel1.doc, tabel2.doc, tabel3.doc):

1) fikseeritud punkt *N* asub väljaspool juhtjoont;
2) fikseeritud punkt *N* asub juhtjoonel (kuidas nimetatakse saadud lookusi?);
3) fikseeritud punkt *N* asub seespool juhtjoont.

Ülesanne 3.20.

Leidke tsissoidi erijuhud lookusena ning konstrueerige vajalik joonis (vt ptk I ül 1.41), kui

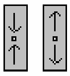
1) antud suvalised jooned *k* ja *l* on kaks paralleelset sirget ning fikseeritud punkt *N* ei asu sirgetel (põhjendage, miks tekkis jäljeks saadud joon!);
2) antud suvalised jooned *k* ja *l* on sirge ja ringjoon ning fikseeritud punkt *N* on ringjoone keskpunkt (lookuseks on **Nikomedese konhoid**);

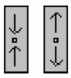
3) antud suvalised jooned k ja l on kaks kontsentrilist ringjoont ning fikseeritud punkt N on nende ringjoonte ühine keskpunkt (lookuseks on antud joontega kontsentriline ringjoon);
4) antud suvaline joon on ringjoon (ringjoon kui kaks kaart k ja l) ning fikseeritud punkt N asub ringjoone keskpunktist kaugusel $r\sqrt{2}$ (lookuseks on **Bernoulli lemniskaat**);
5) antud suvalised jooned l ja k on ringjoon ja ringjoone keskpunkti läbiv sirge ning fikseeritud punkt N asub ringjoonel (lookuseks on **(kald)strofoid**);
6) antud suvaline joon on ringjoon (ringjoon kui kaks kaart l ja k) ning fikseeritud punkt N asub a) väljaspool ja b) seespool ringjoont (lookuseks on **Boothi joon**).

4. Peatükkide 1-3 ülesannete lahendused

4.1. Peatüki 1 ülesannete lahendused

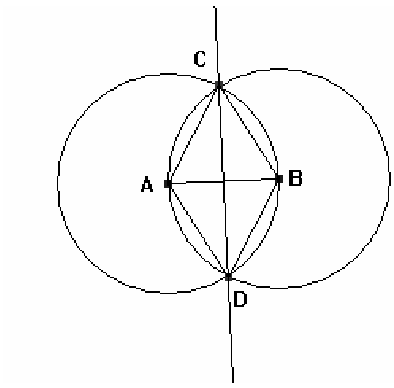
Lahendus 1.3.

Etteantud raadiusega ringjoone suurust on võimalik muuta ainult mastaabiikoonide abil (). Seejuures muutub ühiku pikkus, koos sellega ka ringi suurus, kuid seda vaid visuaalselt. Selles veendumiseks

- ❖ kinnitage ringjoonele vaba punkt (menüüst „Sõltumatu objekt” valik „Vaba punkt” ning seejärel menüüst „Kinnistamine” valik „Vaba punkt ringjoonele (o, .)”).
- ❖ Mõõtke raadius, kasutades menüü „Vaatlus” valikut „Kaugus (. , .)”.
- ❖ Muutke mastaapi  .

Lahendus 1.6.

Kahe ringjoone lõikepunktid *C* ja *D* (vt joonis 4.1) on konstrueeritud nii, et lõigud *AC=CB=BD=AD*(*=AB*). Seega nelinurk *ACBD* on romb. Kuna rombi diagonaalid on risti ja poolitavad üksteist, siis sirge *CD* on lõigu *AB* keskristsirge.



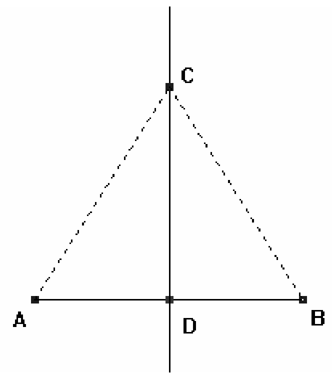
Joonis 4.1.

Lahendus 1.8.

Lõigu *AB* keskristsirge punktide omadus: keskristsirge iga punkt on lõigu *AB* otspunktidest võrdsel kaugusel.

`Põhjendus.` Olgu meil lõigu *AB* keskristsirgel suvaline punkt *C* (vt joonis 4.2). Vaatleme kolmnurka *ABC*. Näitame, et lõigud *AC=BC*.

Keskristsirge läbib lõigu keskpunkti *D*. Seega lõigud *AD=DB*. Kuna keskristsirge on risti lõiguga *AB*, siis tekivad kaks täisnurkset kolmnurka *ADC* ja *DBC*. Viimased on aga KNK tunnuse põhjal vastavalt võrdsed. Seega lõigud *AC=BC*.



Joonis 4.2.

Lahendus 1.17.

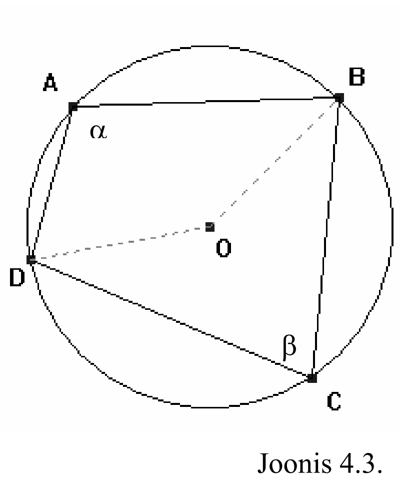
Kõõlnelinurga vastasnurkade summa on 180°.

Põhjendus. Vaatleme kõõlnelinurga vastasnurki $\angle DAB = \alpha$ ja $\angle BCD = \beta$ (vt joonis 4.3). Viimased on vastavalt kaartele *DCB* ja *DAB* toetuvad piirdenurgad (vt ka ül 1.16). Siis kaarele *DCB* toetuv kesknurk $\angle DOB = 2\alpha$ ja kaarele *DAB* toetuv kesknurk $\angle DOB = 2\beta$. Kuna $2\alpha + 2\beta = 360°$ (*miks?)*, siis saamegi, et kõõlnelinurga vastasnurkade summa $\alpha + \beta = 180°$.

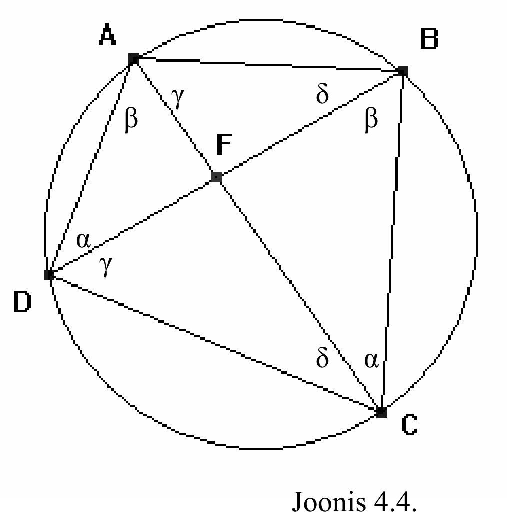
Lahendus 1.18.

Kolmnurgad *ABF* ja *DFC* on sarnased ning *AFD* ja *BFC* on sarnased.

Põhjendus tugineb samale kaarele toetuvate piirdenurkade võrdsusele (vt joonis 4.4).



Joonis 4.3.

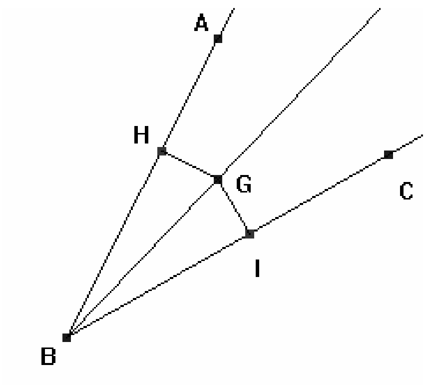


Joonis 4.4.

Lahendus 1.22.

Nurgapoolitaja iga punkt asetseb nurga haaradest võrdsetel kaugustel [1].

Põhjendus. Vaatleme kolmnurki *BHG* ja *BGI* (vt joonis 4.5) ning näitame, et nende küljed *GH* ja *GI* on võrdsed. Kolmnurgad *BGH* ja *BGI* on võrdsed, sest neil on ühine külg *BG* ja $\angle HBG = \angle GBI$ ning $\angle BHG = \angle BGI = 90°$. Seega ka küljed *GH* =*GI*.



Joonis 4.5.

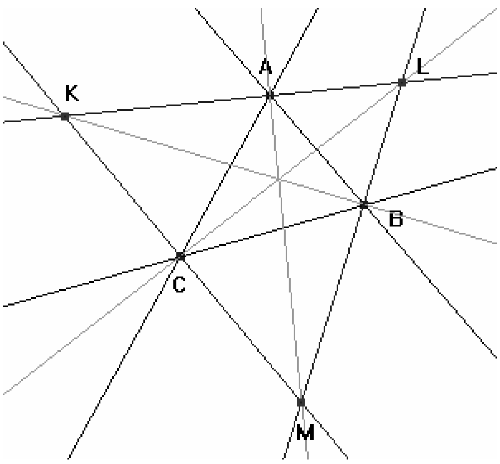
Samal põhjusel on võrdsed ka puutujalõigud.

Lahendus 1.26.

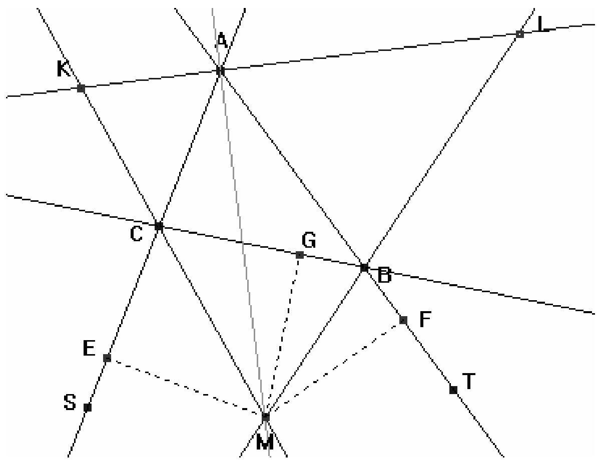
1) Kolmnurga ühe tipu juures olevad sise-ja välisnurga poolitajad asetsevad teineteise suhtes risti. Põhjendus toetub kõrvunurkade poolitajate omadusele (vt ül 1.25).

2) Kolmnurga välisnurkade poolitajad moodustavad kolmnurga (vt ΔKLM joonis 4.6).

3) Hüpotees. Kolmnurga *ABC* sisenurkade nurgapoolitajad on kolmnurga *ABC* välisnurkade nurgapoolitajatest tekkinud kolmnurga *KLM* kõrgusteks. Põhjendus. Olgu kolmnurga *ABC* välisnurkade *SCB* ja *CBT* nurgapoolitajate lõikepunkt *M* (vt



Joonis 4.6.



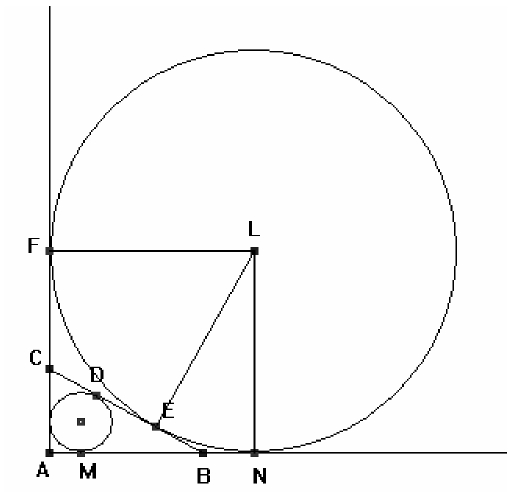
Joonis 4.7.

joonis 4.7). Näitame esiteks, et kolmnurga *ABC* ühe tipu juures olevad sise-ja välisnurga poolitajad asetsevad teineteise suhtes risti (vt ül 1.26 p 1 lahendus) ning teiseks, et punkt *M* asub nurga *CAB* nurgapoolitajal.

Olgu punkti *M* kaugused nurkade *SCB* ja *CBT* haaradest vastavalt *ME* ja *MG* ning *MG* ja *MF*. Nurgapoolitaja suvalise punkti omaduse tõttu on punkti *M* kaugused nurkade *SCB* ja *CBT* haaradest on võrdsed, st *ME=MG=MF*. Kuna haarad *CS* ja *BT* on aga kolmnurga *ABC* vastavate külgede *AC* ja *AB* pikendused, siis on punkti *M* kaugus nurga *CAB* haaradeni samuti *ME* ja *MF*. Seega välisnurkade *SCB* ja *CBT* poolitajate lõikepunkt *M* asub nurga *CAB* nurgapoolitajal.

<u>Lahendus 1.28.</u>

Olgu täisnurkse kolmnurga *ABC* hüpotenuusile *BC* toetuv külgringjoone keskpunkt *L* ja selle projektsioonid kolmnurga külgedel või nende pikendustel *F*, *E* ja *N* (vt joonis 4.8).



Joonis 4.8.

`Hüpotees.` Täisnurkse kolmnurga hüpotenuusile toetuva külgringjoone raadius *r* võrdub selle kolmnurga poole ümbermõõduga *p*.

`Põhjendus.` Puutepunkti tõmmatud raadius on risti puutujaga ja vastavad puutujalõigud (*AF* ja *AN*) on võrdsed. Seega nelinurk *ANLF* on ruut.

Näitame, et $p=r$. Avaldame selleks kolmnurga *ABC* ümbermõõdu:

$$2p=AB+BC+AC.$$

Kasutades puutujalõikude võrdsust, saame

$$BC=BE+EC=BN+CF.$$

Seega

$$2p=AB+BN+CF+AC=AN+AF=2AF=2r.$$

Lahendus 1.30.

Ringjooneks nimetatakse punktihulka tasandil, mille punktid asuvad tasandi antud punktist konstantsetel kaugusel.

Lahendus 1.31.

Lõigu keskristsirgeks nimetatakse punktihulka tasandil, mille punktid asuvad võrdsetel kaugusel antud lõigu otspunktidest.

Lookust ei teki juhul, kui $LA < \frac{1}{2}AB$.

Lahendus 1.32.

Paralleelsete sirgete paar. Paralleelsete sirgete paariks nimetatakse sellist punktihulka tasandil, mille punktid asuvad võrdsetel kaugusel tasandil antud sirgest.

Lahendus 1.33.

Paralleelsete sirgetega määratud riba keskparalleeliks nimetatakse riba sellist punktihulka, mille punktid asuvad võrdsetel kaugusel riba määravatest paralleelsetest sirgetest.

Lahendus 1.34.

Tekib **nurgapoolitajate paar.** Nurgapoolitajaks nimetatakse sellist punktihulka tasandil, mille punktid asuvad nurga haaradest võrdsetel kaugustel.

Vastavad nurgapoolitajad on teineteise suhtes risti.

Lahendus 1.35.

Parabooliks nimetatakse tasandi sellist punktihulka, mille punktid asuvad tasandi fikseeritud punktist ja sirgest võrdsetel kaugustel.

Fikseeritud punkti *M* nimetatakse **parabooli fookuseks** ja sirget *l* **juhtjooneks**.

Lahendus 1.36.

Ellipsiks nimetatakse tasandi sellist punktihulka, mille mistahes punkti kauguste summa tasandi kahe fikseeritud punktini on konstantne.

Fikseeritud punkte *P* ja *R* nimetatakse **ellipsi fookusteks**.

Lahendus 1.37.

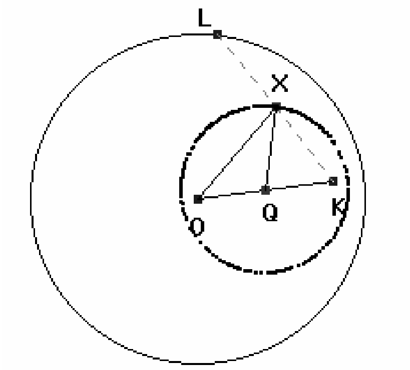
Hüperbooliks nimetatakse tasandi sellist punktihulka, mille mistahes punkti ning tasandi kahe fikseeritud punkti vaheheliste kauguste vahe absoluutväärtus on konstantne. [1]

Fikseeritud punkte *P* ja *R* nimetatakse **hüperbooli fookusteks**.

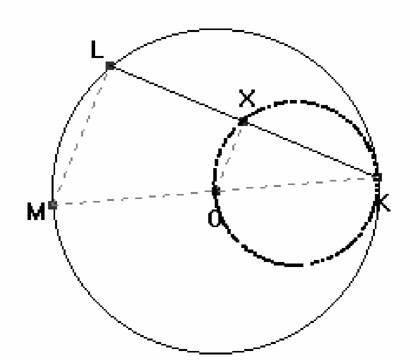
Lahendus 1.38.

Kõigil kolmel juhul tekivad lookuseks ringjooned.

1) Asugu punkt *K* seespool ringjoont. Valime lõigul *OK* punkti *Q* nii, et *OQ*=*QK* (vt joonis 4.9). Seega lõik *QX* on kolmnurga *OKL* kesklõik. Seos $QX = \frac{1}{2}OL$ jääb alati kehtima, kui punkti *L* lohistada mööda ringjoont. Seega jäljeks on ringjoon, mille diameeter võrdub lähteringjoone raadiusega.
2) Asugu punkt *K* ringjoonel. Joonestame diameetri *MK*. Tekib täisnurkne kolmnurk *KLM* täisnurgaga tipus *L* (vt joonis 4.10) *Miks?* Ühendame punktid *O* (ringjoone keskpunkt) ja *X* (lõigu *LK* keskpunkt). Lõik *OX* on kolmnurga *KLM* kesklõik. Teame, et kolmnurga kesklõik on paralleelne tema alusega. Seega $\angle MLK = \angle OXK = 90°$. Lohistades kolmnurga tippu *L* antud ringjoonel, jääb



Joonis 4.9.



Joonis 4.10.

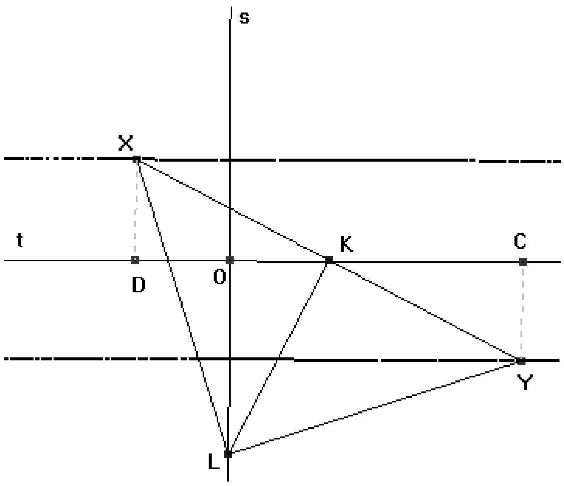
$\angle OXK$ alati täisnurgaks, mistõttu jäljeks ongi ringjoon. Seega jäljeks on ringjoon, mille diameeter on võrdne lähteringjoone raadiusega.

3) Põhjendus analoogiline alapunktis 1 esitatuga.

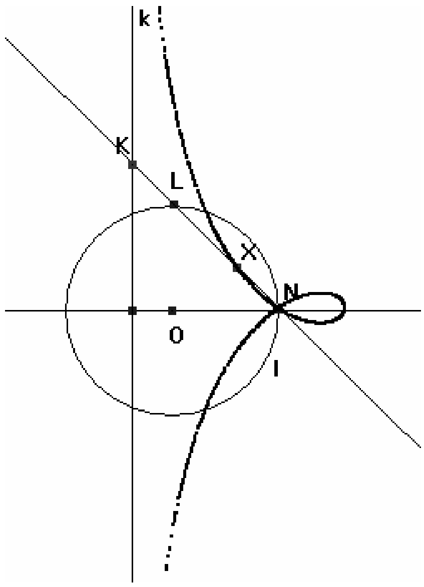
Lahendus 1.40.

Konstrueerime punktide *X* ja *Y* projektsioonid sirgele *t*, tähistades need vastavalt tähtedega *D* ja *C* (vt joonis 4.11). Näitame esmalt, et lõigud *XD=CY*. Vaatleme täisnurkseid kolmnurki *XDK* ja *KCY*. Kuna lõigud *XK=KY* ja $\angle XKD = \angle CKY$, siis ka küljed *XD=CY.*

Näitame nüüd, et punktide *X* ja *Y* kaugus sirgest *t* jääb muutumatuks. Selleks tõestame, et *XD=OK*. Vaatleme kolmnurki *DXK* ja *LKO*. Lõigud *LK* ja *KX* on võrdsed (*miks?*). Samuti on nurgad *KLO* ja *DKX* ning ka nurgad *LKO* ja *KXD* võrdsed, sest nad on ristuvate haaradega nurga[7]. Seega lõigud *OK* ja *CY* on võrdsed.



Joonis 4.11.



Joonis 4.12.

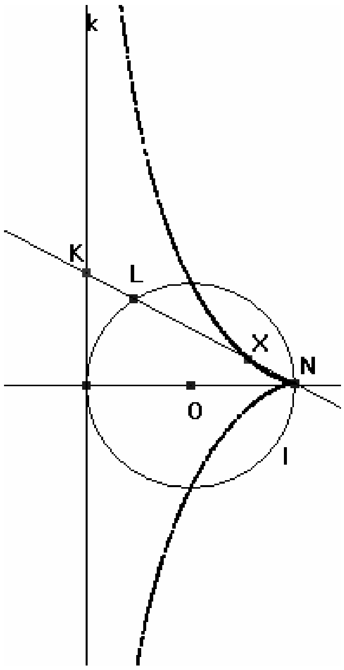
Lahendus 1.41.

1) Kui sirge *k* lõikab ringjoont, siis tsissoid omab silmust (vt joonis 4.12).

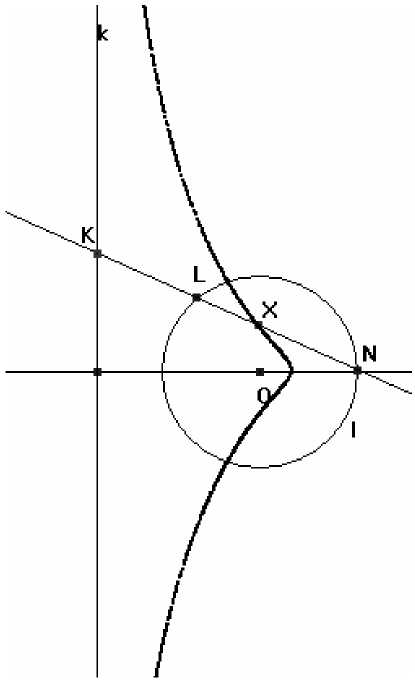
[7] **Ristuvate haaradega nurgad** – kaks nurka, mille vastavad haarad ristuvad (st paiknevad ristuvatel sirgetel). Kui mõlemad nurgad on teravnurgad või mõlemad on nürinurgad, siis need nurgad osutuvad võrdseteks, kui aga üks nurkadest on teravnurk ja teine nürinurk, siis nende nurkade summa osutub sirgnurgaks [1].

2) Kui sirge *k* on ringjoone puutuja, siis tsissoid omab teravikku (vt joonis 4.13).

3) Kui sirge *k* ei lõika ega puutu ringjoont, siis tsissoid ei oma silmust ega teravikku (vt joonis 4.14).



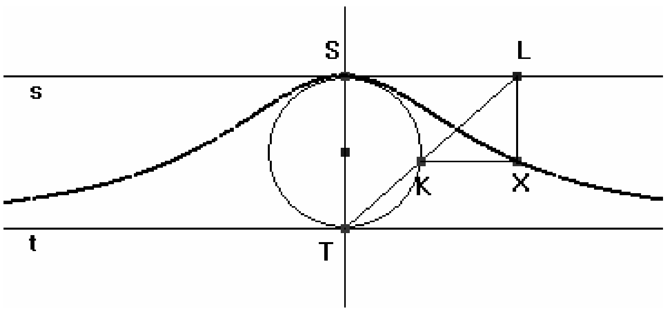
Joonis 4.13.



Joonis 4.14.

Lahendus 1.43.

Joonisel 4.15 on toodud Agnesi lokk.



Joonis 4.15.

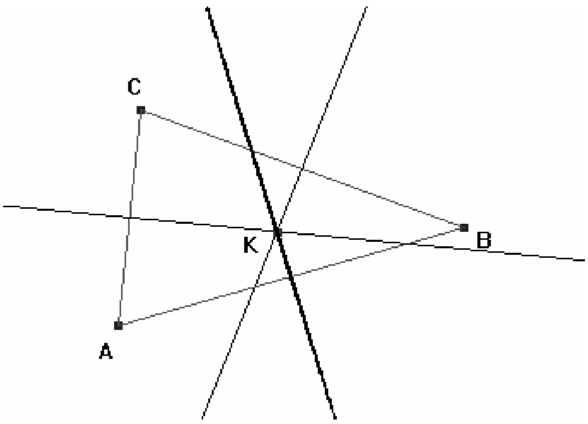
4.2. Peatüki 2 ülesannete lahendused

Lahendus 2.1.

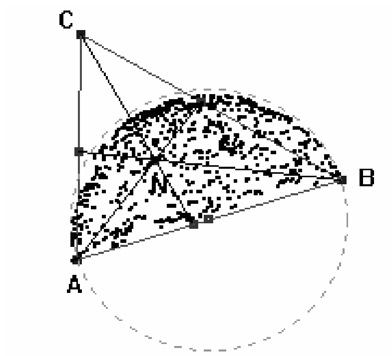
Joonisel 4.16 on toodud kolmnurga *ABC* külgede keskristsirgete lõikepunkti *K* poolt tekitatud jälg juhul, kui tippu *C* lohistatakse vabalt.

Kui me nihutame tippu *C,* siis tema vastasküljele *AB* konstrueeritud keskristsirge asend jääb muutumatuks. Sama ei saa öelda külgede *AC* ja *CB* keskristsirgete kohta. Seetõttu saab keskristsirgete lõikepunkt *K* liikuda vaid külje *AB* keskristsirgel. Seega jäljeks võiks olla sirge. Kui lohistada tippu *C* nii, et $\angle CAB$ või $\angle ABC$ lähenevad sirgnurgale, siis lõikepunkt *K* nihkub mööda külje *AB* ristsirget lõigust *AB* lõpmata kaugele. Sama tulemuse saame ka siis, kui tippu *C* nihutada võimalikult lähedale küljele *AB*. Seega otsitav jälg ongi sirge.

Jälje punkt asub küljel *AB* siis, kui $\angle ACB$ on täisnurk.



Joonis 4.16.



Joonis 4.17.

Lahendus 2.2.

Joonisel 4.17 on toodud nurgapoolitajate lõikepunkti *N* jälje punktid punkti *C* vabal lohistamisel. Näeme, et need punktid asuvad sellise poolringi sisepiirkonnas, mille diameetriks on lõik *AB*. Näitame seda.

Olgu kolmnurga *ABC* nurgad $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$ ja $\angle ACB = \gamma$. Avaldame nurga x (vt joonis 4.18) nurga γ kaudu. Kolmnurgast *ABN* selgub, et

$$x=\pi-\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right).$$

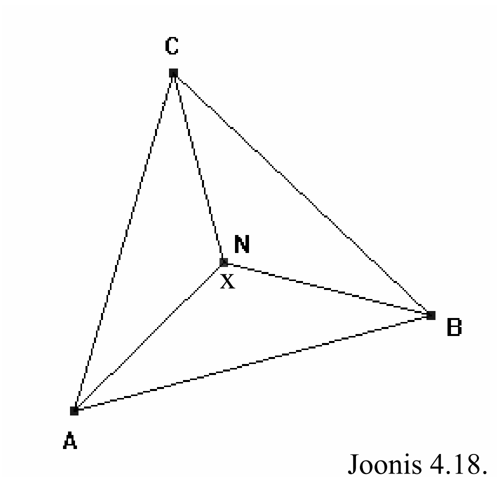
Kuna $\alpha+\beta=\pi-\gamma$, siis

$$\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}.$$

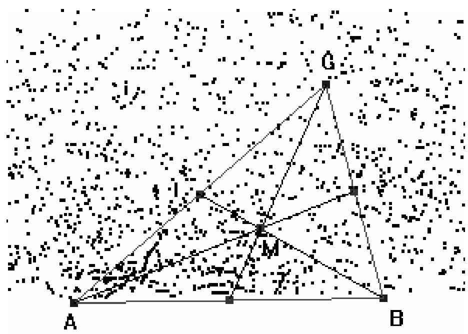
Seega

$$x=\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)=\frac{\pi}{2}+\frac{\gamma}{2}.$$

Kui lohistada tippu *C* nii, et $\gamma\to 0°$, siis $x\to 90°$. See tähendab, et kolmnurga *ABN* piirjuhuks on sellisel juhul alati täisnurkne kolmnurk täisnurgaga tipus *N*. On teada, et täisnurkse kolmnurga täisnurga tipp asub alati ringjoonel, mille diameetriks on selle kolmnurga hüpotenuus. Arvestades veel seda, et nurgapoolitajate lõikepunkt *N* asub alati kolmnurga sisepiirkonnas, saamegi, et kõik punkti *N* jälje punktid jäävad alati poolringi diameetriga *AB* .



Joonis 4.18.



Joonis 4.19.

Lahendus 2.3.

Joonisel 4.19 on toodud mediaanide lõikepunkti *M* jälje punktid punkti *C* vabal lohistamisel. Nagu näeme, asuvad need punktid sirge *AB* ja punkti *C* poolt määratud pooltasandil[8].

[8] **Pooltasand** – üks tasandi kahest osast, milleks tasandi mingi fikseeritud sirge (pooltasandi äär) selle tasandi jaotab [1].

Tipu C lohistamisel võivad kõigi mediaanide pikkused tõkestamatul kasvada. Seetõttu võib ka mediaanide lõikepunkt M tõkestamatult kaugeneda lõigust AB. Samas teame, et mediaanide lõikepunkt jääb alati kolmnurga sisepiirkonda. Seega võib punkt M asuda lõigust AB kuitahes kaugel, kuid ei saa kunagi kuuluda sellele lõigule ega selle pikendustele. Niisiis jaotavad lohistatava tipu vastaskülg ja selle pikendused tasandi kahte ossa: ühte ossa, kus asub ka lohistatav tipp, kuuluvad kõik punkti M jälje punktid ning teise tasandi ossa mitte.

Lahendus 2.4.

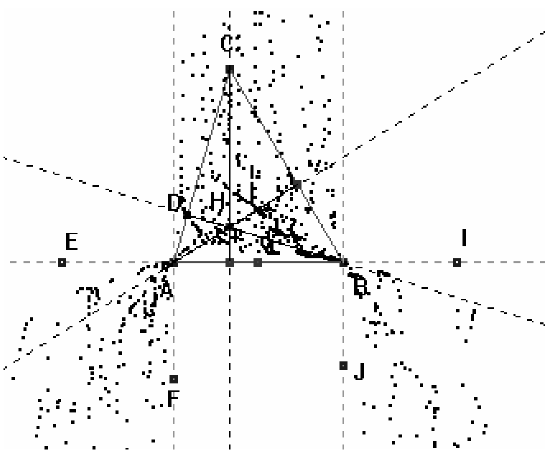
Joonisel 4.20 on toodud kõrguste lõikepunkti H jälje punktid, mis on tekkinud punkti C lohistamisel. Nagu näeme, asuvad jälje punktid kolmes tasandi piirkonnas.

Uurime, kuhu tekivad kolmnurga ABC tipu C lohistamisel kõrguste lõikepunkti H jälje punktid, kui kolmnurk on

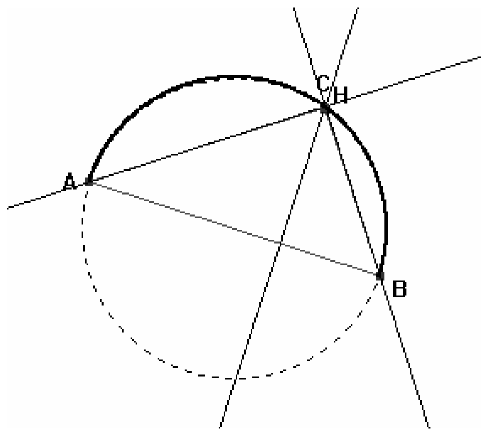
1) täisnurkne;
2) teravnurkne;
3) nürinurkne.

1) Olgu kolmnurk ABC täisnurkne. On teada, et täisnurkse kolmnurga kõik tipud asuvad tema ümberringjoonel, mille diameetriks on hüpotenuus. Kuna $\angle ACB$ (ehk $\angle AHB$) on piirjuhul täisnurk, siis tipp C liigub vaid mööda kolmnurga ABC ümberringjoone poolkaart AB (va kaare otspunktid A ja B; vt joonis 4.21)

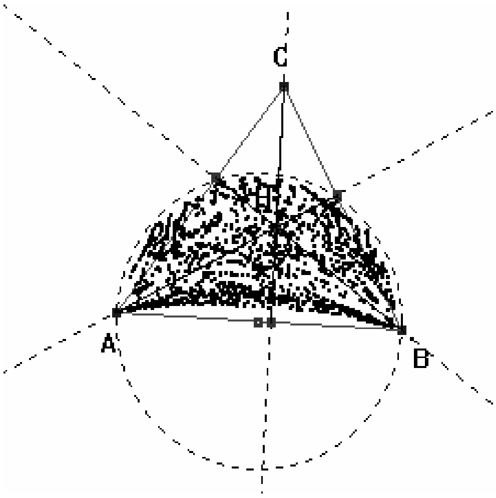
2) Olgu kolmnurk ABC teravnurkne. Joonisel 4.22 on toodud punkti C lohistamisel tekkinud teravnurkse kolmnurga kõrguste lõikepunkti H jälje punktid. Näeme, et



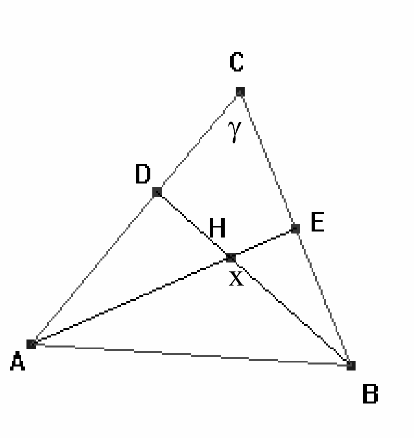
Joonis 4.20.



Joonis 4.21.



Joonis 4.22.



Joonis 4.23.

need punktid asuvad sellises poolringi sisepiirkonnas, mille diameetriks on lõik *AB*. Näitame seda.

Olgu kolmnurga *ABC* külgedele *AC* ja *BC* tõmmatud kõrgused vastavalt *BD* ja *AE* ning $\angle ACB=\gamma$. Paneme tähele, et nurk *x* ja $\angle DHE$ on tippnurgad, seega ka võrdsed. Avaldame nurga *x* (vt joonis 4.23) nurga γ kaudu. Nelinurgast *CDHE* selgub, et

$$x = 360° - (\gamma + \pi) = 180° - \gamma .$$

Kui lohistada tippu *C* nii, et $y \to 90°$, siis ka $x \to 90°$. See tähendab, et kolmnurga *ABC* piirjuhuks on sellisel juhul alati täisnurkne kolmnurk täisnurgaga tipus *H*.

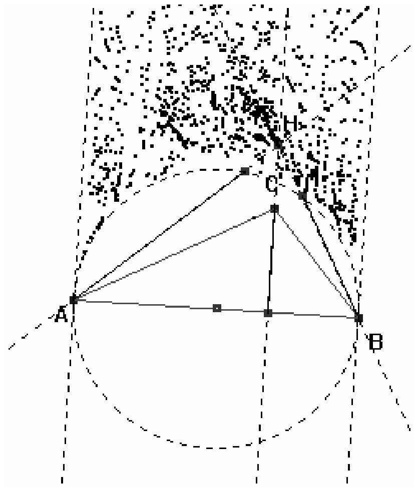
Arvestades veel seda, et teravnurkse kolmnurga kõrguste lõikepunkt *H* asub alati tema sisepiirkonnas saamegi, et kõik punkti *H* jälje punktid jäävad alati diameetriga *AB* poolringi sisepiirkonda.

3) Olgu nüüd kolmnurk *ABC* nürinurkne. Sellisel juhul asub kõrguste lõikepunkt *H* kolmnurga välispiirkonnas. Uurime siin kahte järgmist juhtu:

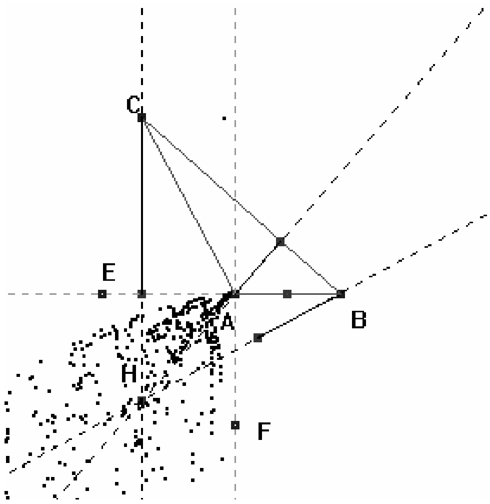
   a) $\angle ACB$ on nürinurk;

   b) $\angle CAB$ või $\angle CBA$ on nürinurk.

Olgu esiteks $\angle ACB$ nürinurk. Nagu jooniselt 4.24 näha, asuvad kõrguste lõikepunkti jälje punktid külje *AB* otspunktidest tõmmatud ristsirgete vahelises



Joonis 4.24.



Joonis 4.25.

piirkonnas (*miks?*). Analoogiliselt eespool tehtuga, saame näidata, et jälje punktid asuvad nüüd väljaspool diameetriga *AB* määratud poolringi.

Olgu nüüd $\angle CAB$ või $\angle CBA$ on nürinurgad. Olgu näiteks $\angle CAB$ nürinurk. Sellisel juhul asuvad jälje punktid teise pooltasandi nurga *EAF* sisepiirkonnas (vt. joonis 4.25).

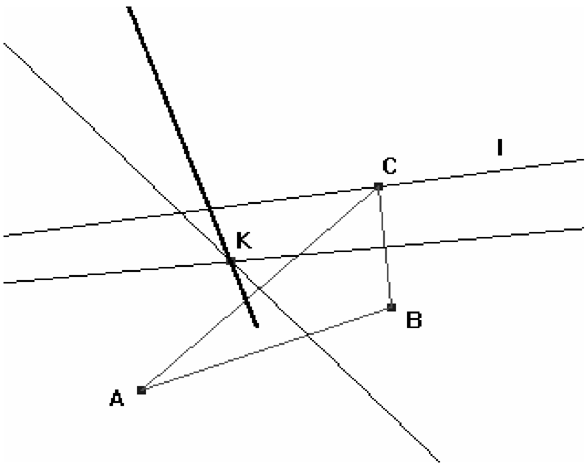
Lohistame tippu *C* võimalikult lähedale külje *AB* pikendusele. Siis $\angle CAB \to 180°$ ja $\angle CHB \to 0°$ ning kõrguste lõikepunkt *H* kaugeneb tõkestamatult külje *AB* pikendusest. Lohistame nüüd tippu *C* lõpmata kaugele külje *AB* pikendusest. Sellisel juhul $\angle CAB \to 90°$ ja $\angle CHB \to 90°$ ning kõrguste lõikepunkt läheneb tõkestamatult külje *AB* pikendusele.

Kirjeldage ise juhtu, kus tipp *C* läheneb või kaugeneb tõkestamatult sirgest *AF.*

Analoogiliselt saame leida jälje punktide asukoha, kui nurk *CBA* on nürinurk. Sel juhul asuvad jälje punktid teise pooltasandi nurga *IBJ* sisepiirkonnas (vt joonis 4.20).

Lahendus 2.5.

Uurimisel selgub, et tipu *C* nihutamisel on keskristsirgete lõikepunkti *K* jäljeks kiir (vt joonis 4.26). Tipu *C* lohistamisel küljed *AC* ja *BC* muutuvad, kuid külg *AB* jääb samaks. Seega jääb samaks ka külje *AB* keskristsirge. Et keskristsirgete lõikepunkt



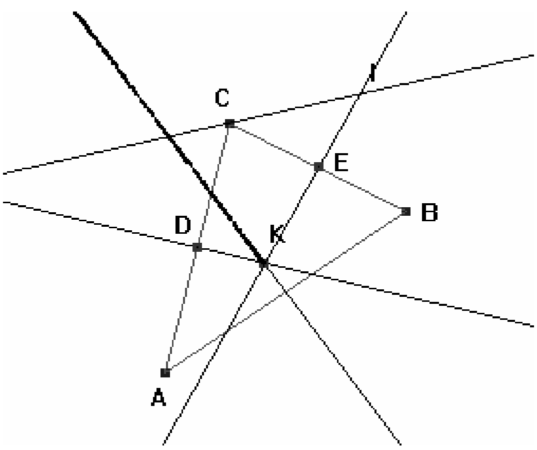
Joonis 4.26.

peab kuuluma ka külje AB keskristsirgele, siis asuvad otsitavad jälje punktid sellel sirgel, täpsemini, sellele sirgele kuuluval kiirel.

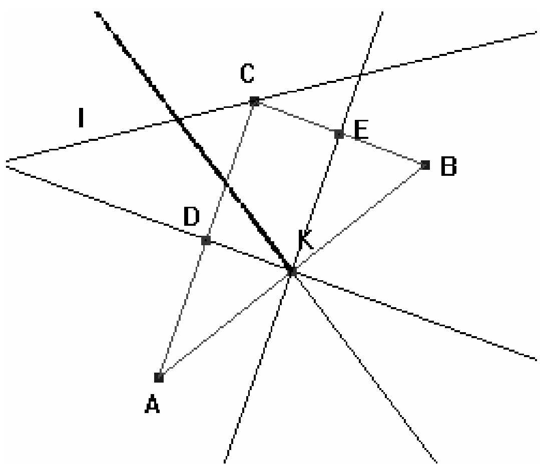
Uurime, kuidas asetseb kiire alguspunkt nihutatava punkti C ja tema vastaskülje AB suhtes. Vaatleme kolme järgmist juhtu:

1) nurk ACB jääb tipu C nihutamisel alati teravnurgaks;
2) nurk ACB saab tipu C nihutamisel maksimaalseks suuruseks $90°$;
3) nurk ACB muutub tipu C nihutamisel ka nürinurgaks.

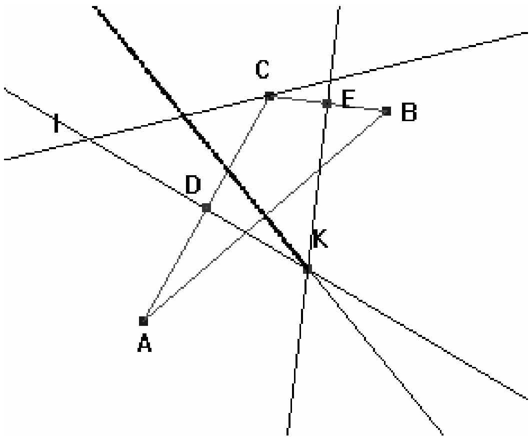
Kui nurk ACB jääb tipu C lohistamisel alati teravnurkseks, siis kiire alguspunkt asub vaadeldava kolmnurga sisepiirkonnas (vt joonis 4.27). Kui aga nurk ACB saab tipu C lohistamisel maksimaalseks suuruseks $90°$, siis asub kiire alguspunkt küljel AB (vt joonis 4.28). Viimasel juhul, kui nurk ACB muutub tipu C nihutamisel nürinurgaks, asub kiire alguspunkt kolmnurga välispiirkonnas (vt joonis 4.29).



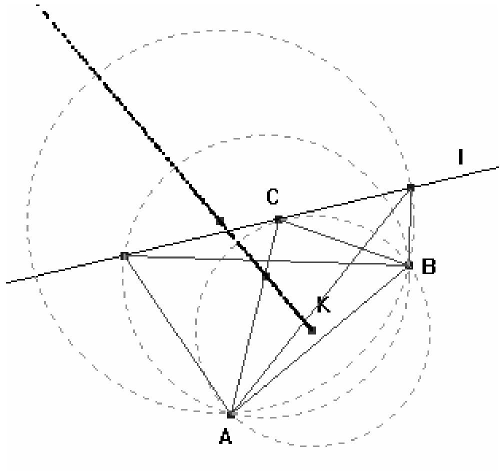
Joonis 4.27.



Joonis 4.28.



Joonis 4.29.



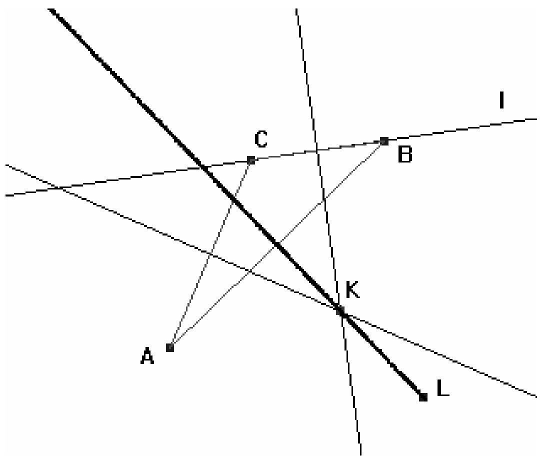
Joonis 4.30.

Paneme tähele, et kiire alguspunktiga on tegemist siis, kui lohistatava tipu juures olev nurk *C* saavutab maksimaalse suuruse. (Sellisel juhul on keskristsirgete *KD* ja *KE* vaheline nurk *DKE* minimaalne, see aga vastabki punkti *K* piirseisule külje *AB* keskristsirgel.) See juhtub siis, kui juhtjoon *l* on antud kolmnurga *ABC* ümberringjoone puutujaks, so juhul kui ümberringjoone raadius saab minimaalse väärtuse. Iga suurema ringjoone korral on nurk *ACB* väiksem (antud kõõlule toetuvatest erinevate ringjoonte piirdenurkadest on väiksem see, mis vastab suuremale ringjoonele; vt joonis 4.30).

<u>Lahendus 2.6.</u>

Asugu lisaks lohistatavale tipule ka tipp *B* juhtjoonel (vt joonis 4.31). Sel juhul on jäljeks lahtine poolsirge[9].

Nihutame tippu *C* võimalikult lähedale tipule *B*. Sel juhul läheneb keskristsirgete lõikepunkt *K* punktile *L* (juhtjoonele punktist *B* tõmmatud ristsirge ja külje *AB* keskristsirge lõikepunkt). Paneme tähele, et *L* ja *K* ei saa kattuda, seega pole juhtjooneks kiir, vaid lahtine poolsirge *LK*.

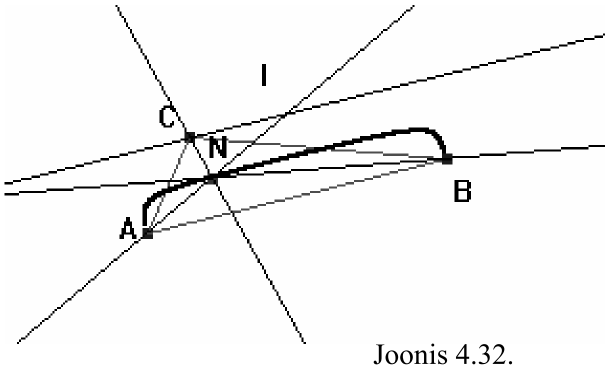


Joonis 4.31.

[9] **Poolsirge** – üks sirge kahest osast, milleks sirge mingi fikseeritud punkt (poolsirge otspunkt) selle sirge jaotab [1].

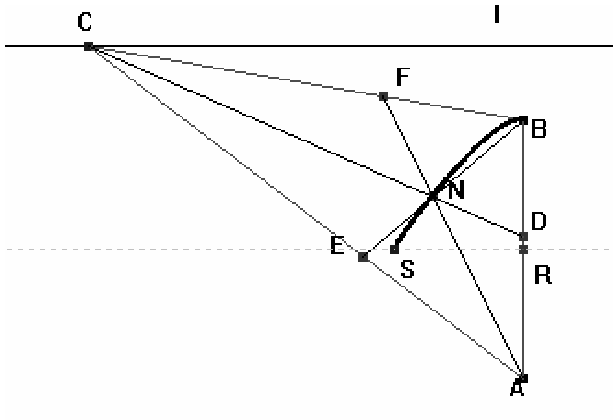
Lahendus 2.7.

1) Olgu kolmnurga *ABC* külg *AB* juhtjoonega paralleelne (vt joonis 4.32). Tipu *C* lohistamisel saame nurgapoolitajate lõikepunkti *N* jäljeks mingi kaare *AB*.



Joonis 4.32.

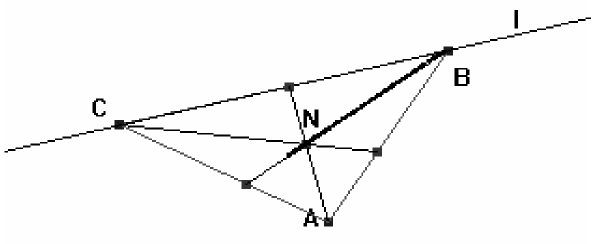
2) Olgu kolmnurga *ABC* külje *AB* pikendus risti juhtjoonega. Olgu veel sirge *SR* paralleelne juhtjoonega, kus punkt *R* on külje *AB* keskpunkt ning punkt *S* nurgapoolitajate lõikepunkti *N* piirjuht, kui $\angle ACB \to 0°$. Tipu *C* lohistamisel saame nurgapoolitajate lõikepunkti *N* jäljeks mingi kaare *SB* (vt joonis 4.33).



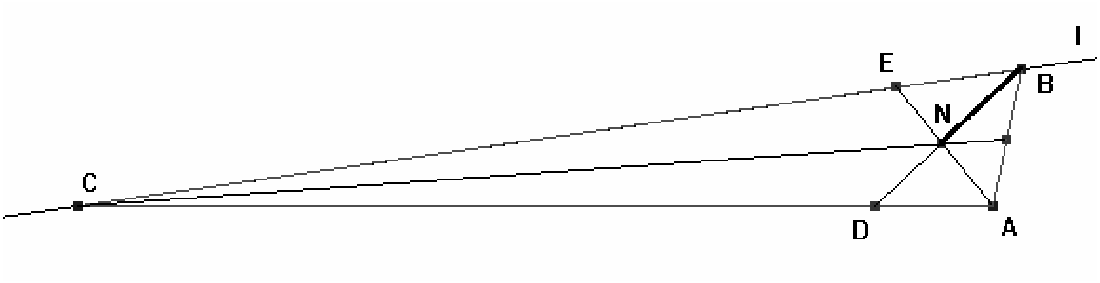
Joonis 4.33.

Lahendus 2.8.

Asugu lisaks lohistatavale tipule ka tipp *B* juhtjoonel. Paneme tähele, et tipu *C* lohistamisel jääb nurga *CBA* suurus konstantseks, ülejäänud nurgad muutuvad. Seega nurgapoolitajate lõikepunkt libiseb mööda nurga *CBA* muutumatut nurgapoolitajat ja jäljeks on mingi vahemik vastaval sirgel (vt joonis 4.34).



Joonis 4.34.



Joonis 4.35.

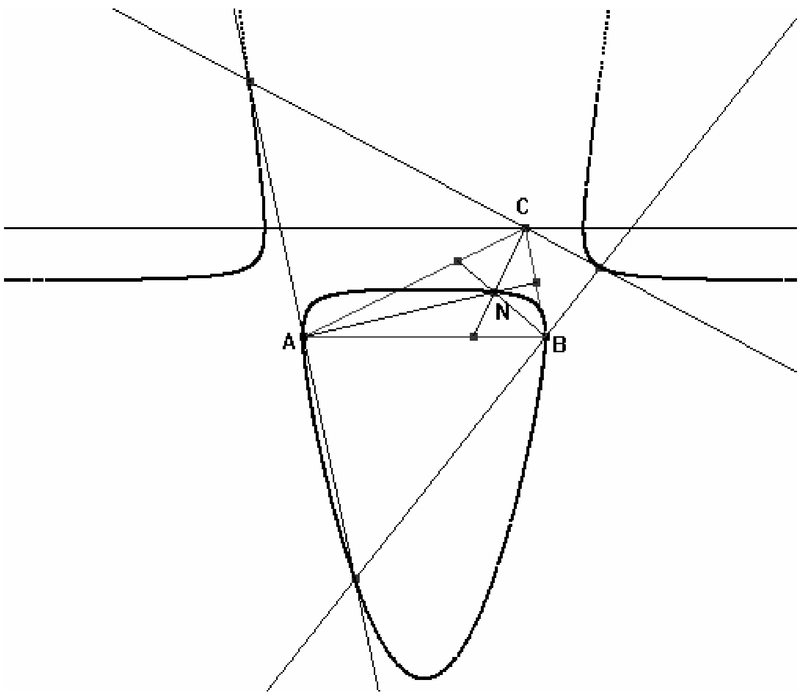
Nihutame tippu C võimalikult lähedale tipule B. Sel juhul läheneb nurgapoolitajate lõikepunkt N punktile B, kuid ei kattu viimasega.

Kaugenedes tipuga C tõkestamatult punktist B (vt joonis 4.35), näeme, et ka nurgapoolitajate lõikepunkt N kaugeneb punktist B ja nurk ACB läheneb nullile. Seega $\angle CBA + \angle BAC \to 180°$ ja $\angle ANB \to 90°$. Seega nurkade CAB ja ABC nurgapoolitajad oleksid piirjuhul risti ning oleksid rombi $DABE$ diagonaalideks. Teame, et rombi diagonaalid poolitavad teineteist. Seega jälje pikkus on väiksem kui pool lõigu DB pikkust.

Lahendus 2.9.

Olgu täidetud ülesande 2.7. tingimused: kui kolmnurga

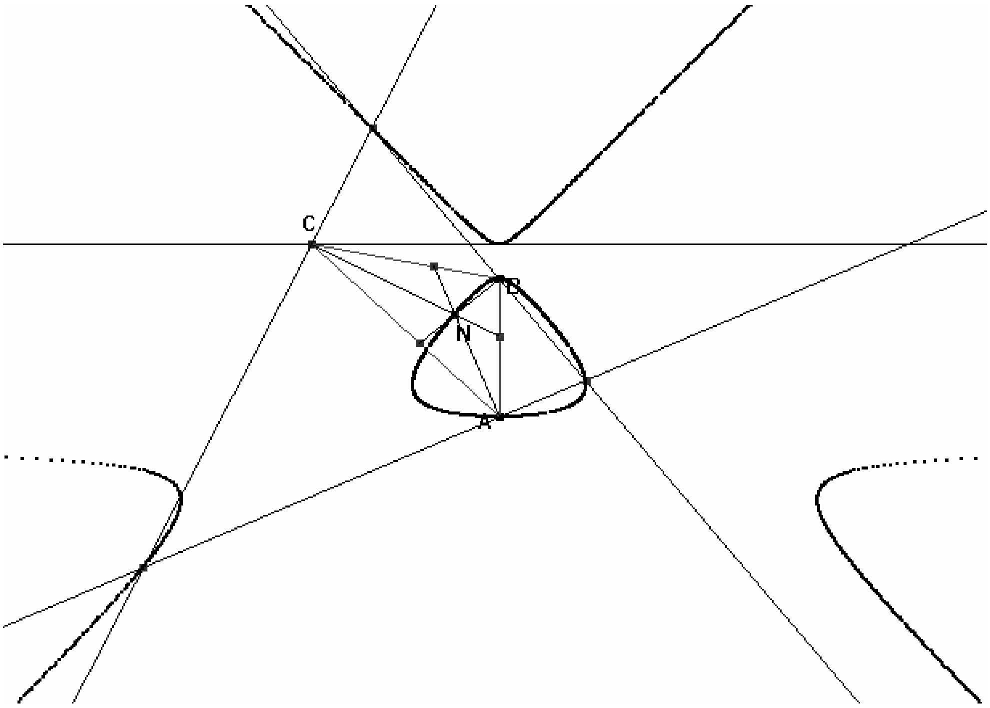
1) külg AB on paralleelne juhtjoonega;



Joonis 4.36.

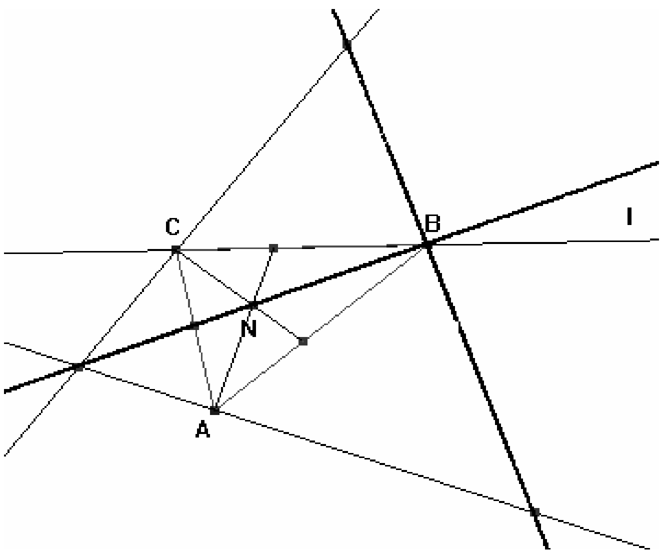
2) külje *AB* pikendus on risti juhtjoonega.

Siis kolmnurga sisenurkade nurgapoolitajate lõikepunkti *N* ja välisnurga poolitajate lõikepunktide poolt tekivad vastavalt joonistel 4.36 ja 4.37 olevad jäljed.



Joonis 4.37.

Ülesande 2.8. tingimustel (st lisaks tipule *C* asub juhtjoonel *l* ka tipp *B*) tekib joonisel 4.38 toodud jälg.



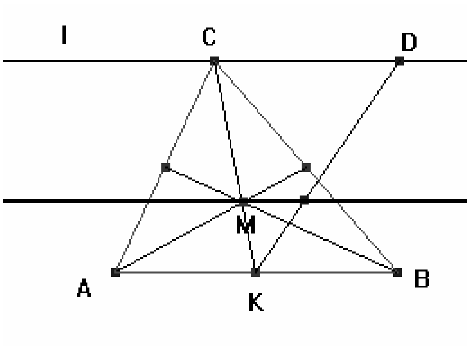
Joonis 4.38.

Lahendus 2.10.

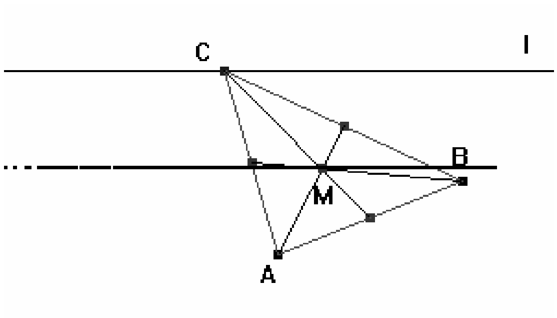
Asugu kolmnurga *ABC* tipp *C* juhtjoonel ning tipud *A* ja *B* ühel pool juhtjoont. Uurime järgnevalt kahte juhtu:

1) $AB \parallel l$;
2) $AB \nparallel l$.

Olgu kolmnurga külg *AB* paralleelne juhtjoonega. Sel juhul on jäljeks sirge (vt joonis 4.39).



Joonis 4.39.



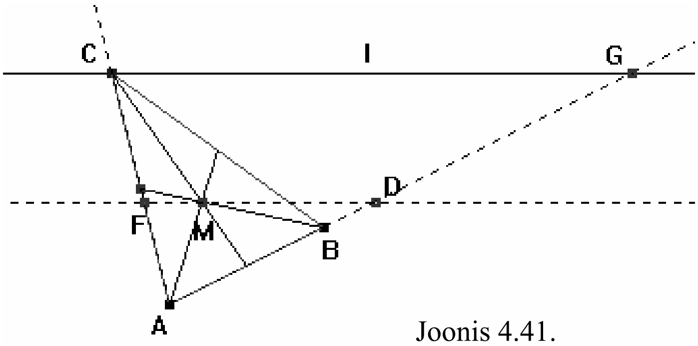
Joonis 4.40.

Mediaani *CK* korral kehtib võrdus $\frac{CM}{KM} = 2$. Tipu *C* lohistamisel mingisse punkti *D* see suhe säilib. Seega toetudes kiirteteoreemi pöördteoreemile saamegi, et jälje punktid asuvad juhtjoonega paralleelsel mediaanide keskpunkti *M* läbival sirgel.

Lohistame tippu *C* tõkestamata kaugele tippudest *A* ja *B*. Sel juhul kaugeneb ka punkt *M* nendest punktidest tõkestamatult. Seega jäljeks on sirge.

Olgu nüüd $AB \nparallel l$. Sellisel juhul on jäljeks juhtjoonega paralleelsel mediaanide lõikepunkti läbival sirgel asuv lahtine poolsirge (vt joonis 4.40). Seda, et jälje punktid asuvad juhtjoonega paralleelsel sirgel *FM*, saab näidata analoogiliselt eelmise juhuga. Jääb näidata, et jäljeks pole kogu sirge.

Olgu näiteks punkti B kaugus juhtjoonest väiksem kui punkti A kaugus. Pikendame lõiku *AB* üle otspunkti *B* kuni lõikumiseni juhtjoonega. Tähistame saadud lõikepunkti tähega *G* (vt joonis 4.41). Kui nüüd tippu *C* lohistada võimalikult lähedale punktile *G*, siis mediaanide lõikepunkt *M* läheneb mööda sirget *FM* tõkestamatult punktile *D*. Kusjuures *D* on külje *AB* või selle pikenduse ja sirge *FM* lõikepunkt. Paneme tähele, et



Joonis 4.41.

a) punkt *D* asub külje *AB* pikendusel, kui sirged *l* ja *FD* jäävad ühele poole tippu *B*;

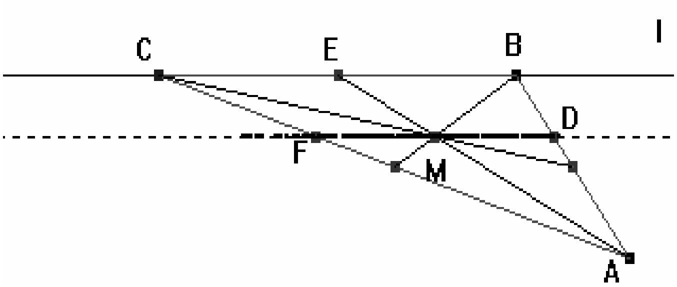
b) punkt *D* asub küljel *AB*, kui tipp *B* jääb sirgete *l* ja *FD* vahele;

c) punkt *D* ühtib tipuga *B*, kui tipp *B* asub sirgel *FD.*

Kui aga tippu *C* lohistada tõkestamatult kaugele punktist *G,* kaugeneb ka mediaanide lõikepunkt *M* punktist *D* tõkestamatult kaugele. Seega jäljeks on lahtine poolsirge *DM*.

Lahendus 2.11.

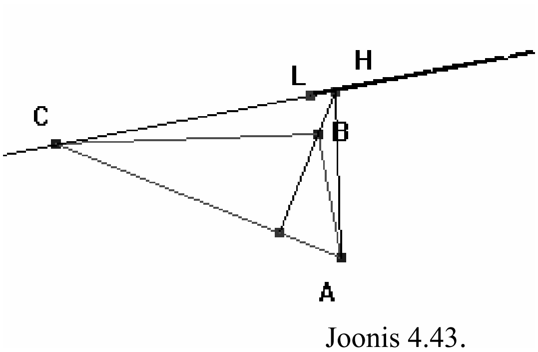
Asugu lisaks lohistatavale tipule ka tipp *B* juhtjoonel. Sel juhul on jäljeks samuti lahtine poolsirge. Ka nüüd asuvad jälje punktid sellisel juhtjoonega paralleelsel sirgel, mis läbib mediaanide lõikepunkti *M* (vt joonis 4.42). Selle tõestamine on analoogiline *eelmise* ülesande lahendusega.



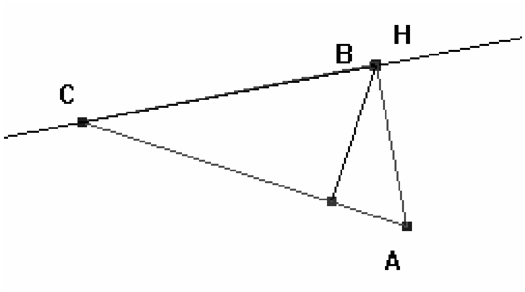
Joonis 4.42.

Lahendus 2.12.

1. i) Asugu kolmnurga tipud A ja B ühel pool juhtjoont. Olgu juhtjoon risti kolmnurga küljega AB või selle pikendusega (vt joonis 4.43). Siis küljele AB tõmmatud kõrgus asub juhtjoonel. Seega tipu C lohistamisel kõrguste lõikepunkt H liigub mööda juhtjoont ja jäljeks võiks olla kas sirge või selle mõni osa. Jäljepunktiks ei saa olla külje AB pikenduse ja juhtjoone lõikepunkt L, kuna tipu C lohistamisel lõpmata kaugele kõrguste lõikepunkt H läheneb küll punktile L, kuid ei ühti sellega. Seega jäljeks on poolsirge.



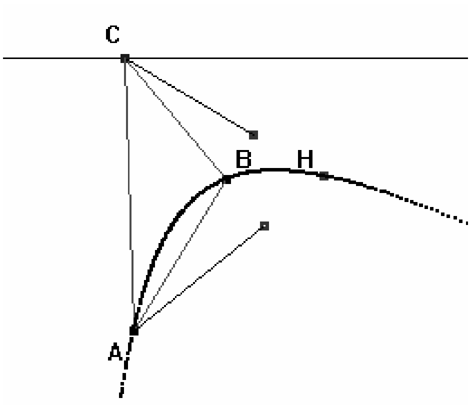
Joonis 4.43.



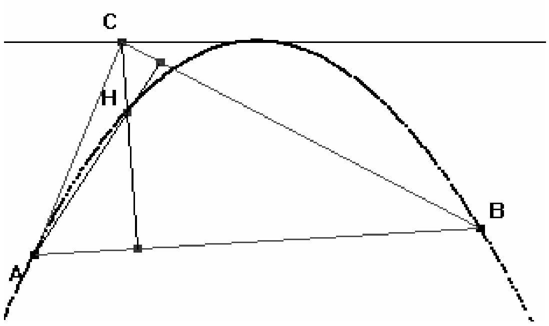
Joonis 4.44.

ii) Olgu kolmnurga külg AB risti juhtjoonega nii, et tipp B asub juhtjoonel. Sellisel juhul saame C lohistamisel alati täisnurkse kolmnurga. Et täisnurkse kolmnurga kõrgused lõikuvad täisnurga tipus, siis on otsitavaks jäljeks punkt B (vt joonis 4.44).

2. i) Asugu kolmnurga tipud A ja B ühel pool juhtjoont (vt joonis 4.45) ja olgu $AB \perp l$. Tekib hüpotees, et jäljeks on parabool (selle põhjendame hiljem), mis läbib kolmnurga tippe A ja B.



Joonis 4.45.



Joonis 4.46.

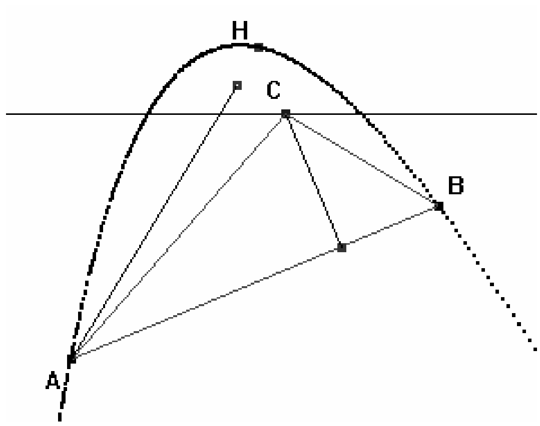
Jälg läbib kolmnurga tippu *A* juhul, kui punkti *C* lohistamisel saavutatakse olukord, kus kolmnurga tipu *A* juurde tekib täisnurk. Et täisnurkse kolmnurga kõrgused lõikuvad täisnurga tipus, siis jälg läbib punkti *A*.

Vaatleme veel jälje ja juhtjoone vastastikust asendit. Siin on kolm erinevat võimlalust:

1) juhtjoon ja parabool ei lõiku (vt joonis 4.45);

2) juhtjoon ja parabool puutuvad ühes punktis (vt joonis 4.46);

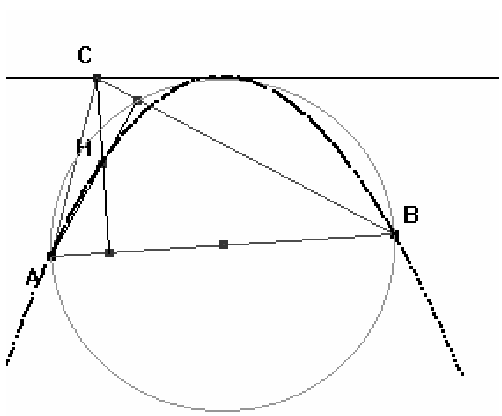
3) juhtjoon ja parabool lõikuvad kahes punktis (vt joonis 4.47).



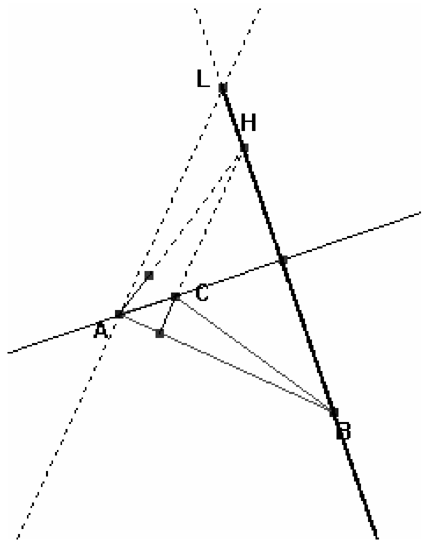
Joonis 4.47.

See, milline neist võimalustest realiseerub, sõltub küljele *AB* (kui diameetrile) joonestatud ringjoone ja juhtjoone vastastikusest asendist.

Vaatleme näiteks juhtu, kui ringjoon puutub juhtjoont. Kui nüüd tippu *C* lohistada mööda juhtjoont, siis tekib situatsioon (ringjoone ja juhtjoone puutepunktis; vt joonis 4.48), kus kolmnurga nurk *C* osutub diameetrile *AB* toetuvaks piirdenurgaks, seega täisnurgaks. Seega asub ka vastav kõrguste lõikepunkt e jälje punkt juhtjoonel.



Joonis 4.48.



Joonis 4.49.

Analoogiliselt saame näidata, et juhtjoonel ja jäljel on kaks lõikepunkti juhul, kui ringjoon ja juhtjoon lõikuvad kahes punktis.

Juhul, kui ringjoon ja juhtjoon ei lõiku, siis ei teki situatsiooni, kus kolmnurga nurk *C* oleks diameetrile toetuv piirdenurk. Seega see nurk ei saa võrduda ka 90° ja kõrguste lõikepunkt asuda juhtjoonel.

ii) Asugu tipp *A* juhtjoonel (vt joonis 4.49). Siis ka kolmnurga külg *AC* asub juhtjoonel ning tipust *B* joonestatud kõrgus on kogu aeg juhtjoonega risti. Kuna kõrguste lõikepunkt asub ka sellel kõrgusel, siis on jäljeks juhtjoonega ristuv sirge või poolsirge. Paneme tähele, et jäljepunktiks ei saa kunagi olla külje *AB* otspunktile *A* tõmmatud ristsirge ja tipust *B* küljele *AC* tõmmatud kõrguse pikenduse lõikepunkt *L*.

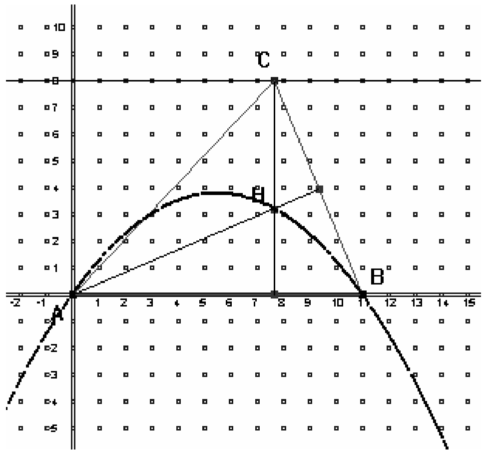
Kui tippu *C* lohistada lohistada võimalikult lähedale tipule *A*, siis kõrguste lõikepunkt *H* läheneb punktile *L,* kuid kunagi ei ühti sellega.

Lahendus 2.13. [3]

Leiame lookuse üldvõrrandi. Asugu kolmnurga *ABC* tipp *A* koordinaatide alguspunktis ja tipp *B* x-telje positiivsel suunal (vt joonis 4.50). Olgu juhtjoone võrrand, mida mööda punkt *C* libiseb,

$$y = mx + q\,,$$

siis $C(x_C; mx_C + q)$. Kolmnurga kõrguste lõikepunkti *H* esimene koordinaat on siis samuti x_C ja vastava kõrguse H_C võrrand on



Joonis 4.50.

$$x = x_C\,.$$

Leiame ka tippu *A* läbiva kõrguse H_A võrrandi. Kuna see kõrgus läbib koordinaatide alguspunkti, siis esitub vastav võrrand kujul

$$y = k_{H_A} \cdot x\,.$$

Tõusu k_{H_A} leiame kui külje *BC* ristsirge tõusu. Selleks leiame kõigepealt külje *BC* enda tõusu, milleks on

$$k_{BC} = \frac{mx_C + q}{x_C - x_B}.$$

Kuna *BC* ja temale tõmmatud ristsirge on risti, siis kehtib seos

$$k_{BC} \cdot k_{H_A} = -1,$$

millest

$$k_{H_A} = -\frac{1}{k_{BC}}.$$

Seega otsitav kõrguse H_A võrrand on

$$y = \frac{(x_B - x_C)}{mx_C + q} x.$$

Arvestades nüüd seda, et kõrguste lõikepunktis $x_C = x$, saame

$$y = \frac{(x_B - x)}{mx + q} x.$$

<u>Lahendus 2.14.</u>

1) Olgu m=0 ja q≠0.

Sellisel juhul on juhtjoone võrrand

$$y = q,$$

st juhtjoon on paralleelne x-teljega (antud juhul kolmnurga küljega *AB*).

Lookuse võrrandiks saame sellisel juhul

$$y = \frac{(x_B - x)}{q} x = \frac{x_B}{q} x - \frac{1}{q} x^2.$$

Nagu nägime jooniselt 4.50 ja nüüd ka võrrandist, on lookuseks parabool.

2) Olgu nüüd m≠0 ja q=0.

Sellisel juhul on juhtjoone võrrandiks

$$y = mx,$$

st juhtjoon läbib koordinaatide alguspunkti.

Lookuse võrrandiks saame siis

$$y = \frac{(x_B - x)}{mx}x = \frac{x_B}{m} - \frac{1}{m}x.$$

Jooniselt 4.49 selgus, et sellisel juhul on lookus ja juhtjoon teineteisega ristuvad sirged. Sama näeme ka nende joonte võrranditest – vastavate tõusude korrutis on –1:

$$-\frac{1}{m} \cdot m = -1.$$

3) Olgu $m \neq 0$ ja $q \neq 0$.

Sellisel juhul on juhtjooneks suvaline sirge, mis ei ole paralleelne x-teljega ega läbi koordinaatide alguspunkti.

Nüüd on juhtjoone võrrandiks

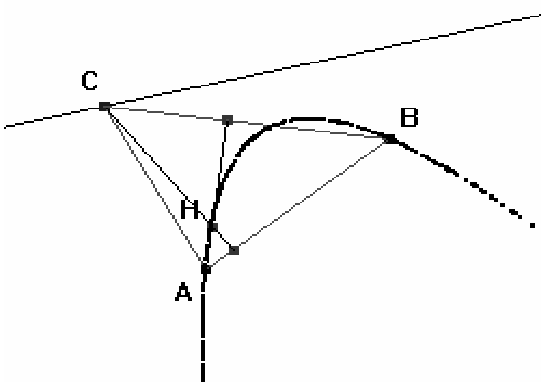
$$y = mx + q$$

ja kõrguste lõikepunkti H jäljeks parabool võrrandiga

$$y = \frac{(x_B - x)}{mx + q}x.$$

(Vt joonis 4.51)

Uurime veel juhtu, kus juhtjoon on risti kolmnurga küljega AB. Seega juhtjoone võrrand on $x = p$ (p=const). Sellisel juhul asub kolmnurga kõrgus H_C juhtjoonel. Mistõttu ka kõrguste lõikepunkt on alati juhtjoonel (vt joon 4.43).



Joonis 4.51.

Lahendus 2.15.

Lõikepunktide leidmiseks peame lahendama juhtjoone ja lookuse võrrandist moodustatud võrrandisüsteemi.

1) Olgu juhtjoon paralleelne küljega *AB* ja asugu juhtjoon y-telje positiivses piirkonnas (vt ka joonis 4.50). Saame süsteemi

$$\begin{cases} y = \dfrac{(x_B - x)}{q} x \\ y = q \end{cases},$$

kus q>0. Süsteemi lahendiks on

$$x = \frac{x_B}{2} \pm \frac{\sqrt{x_B^2 - 4q^2}}{2}.$$

Kui x_B>2q või $x_B < -2q$, siis juhtjoonel ja lookusel on kaks lõikepunkti: $L_1\left(\dfrac{x_B}{2} - \dfrac{\sqrt{x_B^2 - 4q^2}}{2}; q\right)$ ja $L_2\left(\dfrac{x_B}{2} + \dfrac{\sqrt{x_B^2 - 4q^2}}{2}; q\right)$.

Kui $-2q < x_B < 2q$, siis juhtjoonel ja lookusel lõikepunktid puuduvad.

Kui $x_B = \pm 2q$, siis lookus puutub sirget punktis $L\left(\dfrac{x_B}{2}; q\right)$.

Analoogiliselt saab toimida juhul, kui q<0.

2) Läbigu juhtjoon kolmnurga tippu *A* (vt ka joonis 4.49). Saame süsteemi

$$\begin{cases} y = \dfrac{x_B}{m} - \dfrac{1}{m} x \\ y = mx \end{cases},$$

kus $m \neq 0$ (*miks?*). Süsteemi lahendiks on $x = \dfrac{x_B}{m^2 + 1}$.

Antud juhul juhtjoon ja lookus (samuti sirge) ristuvad punktis $L\left(\dfrac{x_B}{m^2+1}; \dfrac{mx_B}{m^2+1}\right)$.

3) Vaatleme nüüd üldjuhtu. Saame süsteemi

$$\begin{cases} y = \dfrac{(x_B - x)}{mx + q} x \\ y = mx + q \end{cases}.$$

Olgu q>0. Siis on süsteemi lahendiks

$$x = \frac{x_B - 2mq \pm \sqrt{x_B^2 - 4q(mx_B + q)}}{2(m^2+1)}.$$

Kui $x_B > 2q\left(m + \sqrt{m^2+1}\right)$ või $x_B < 2q(m - \sqrt{m^2+1})$, siis lookus lõikab juhtjoont kahes punktis $L_1\left(\frac{x_B - 2mq + \sqrt{x_B^2 - 4q(mx_B + q)}}{2(m^2+1)}; m\frac{x_B - 2mq + \sqrt{x_B^2 - 4q(mx_B + q)}}{2(m^2+1)} + q\right)$ ja $L_2\left(\frac{x_B - 2mq - \sqrt{x_B^2 - 4q(mx_B + q)}}{2(m^2+1)}; m\frac{x_B - 2mq - \sqrt{x_B^2 - 4q(mx_B + q)}}{2(m^2+1)} + q\right)$.

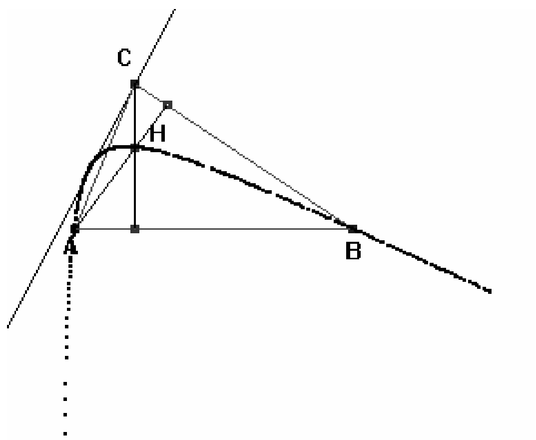
Kui $2q(m - \sqrt{m^2+1}) < x_B < 2q(m + \sqrt{m^2+1})$, siis juhtjoonel ja lookusel lõikepunktid puuduvad.

Kui $x_B = 2q(m \pm \sqrt{m^2+1})$, siis lookus puutub juhtjoont punktis $L\left(\frac{x_B - 2mq}{2(m^2+1)}; m\frac{x_B - 2mq}{2(m^2+1)} + q\right)$ (vt joonis 4.52).

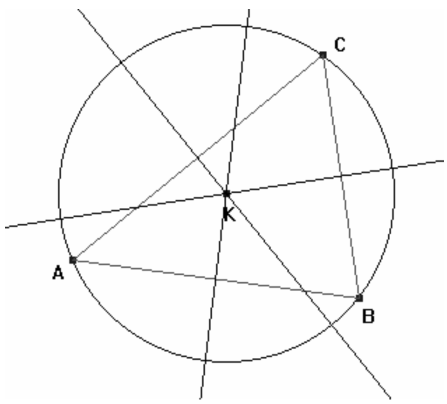
<u>Lahendus 2.16.</u>

Jäljeks on keskristsirgete lõikepunkt (vt ka joonis 4.53).

Teame, et keskristsirgete lõikepunkt on kolmnurga ümberringjoone keskpunktiks. Tipu C lohistamisel mööda seda ringjoont jääb punkt K alati paigale.



Joonis 4.52.



Joonis 4.53.

Lahendus 2.17.

Asugu tipp *B* seespool juhtjoont. Kuna lõik *AB* jääb tipu *C* lohistamisel muutumatuks (vt joonis 4.54), siis külgede keskristsirgete lõikepunkt peab asuma ka külje *AB* keskristsirgel. Seega võib jäljeks olla sirge või mingi sirge osa. Näitame, et jäljeks on lahtine poolsirge.

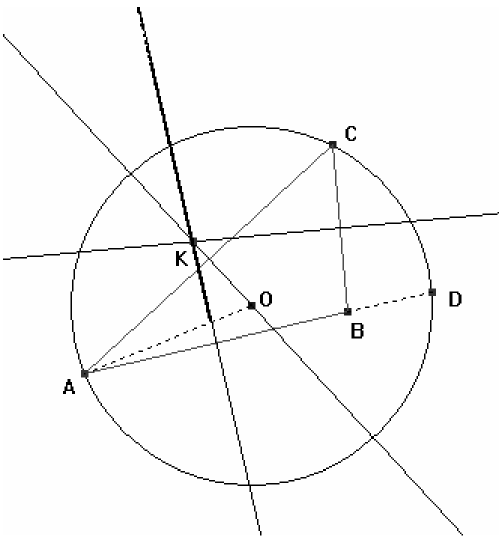
1) Asugu tipp *B* seespool juhtjoont. Paneme tähele, et kolmnurga külg *AC* on juhtjoone kõõl ja kõõlule konstrueeritud keskristsirge läbib alati ringjoone keskpunkti. Lähenedes tipuga *C* vastupäeva tõkestamatult tipule *A*, läheneb keskristsirgete lõikepunkt *K* raadiusele *AO* (so külje *AC* keskristsirge asend piirjuhul, kui punktid *A* ja *C* kattuvad).

Lähenedes aga tipuga *C* päripäeva tõkestamatult punktile *D* (so külje *AB* ja ringjoone lõikepunktile), läheneb nurk *ABC* sirgnurgale ja seetõttu kaugeneb keskristsirgete lõikepunkt lõigust *AB* tõkestamatult.

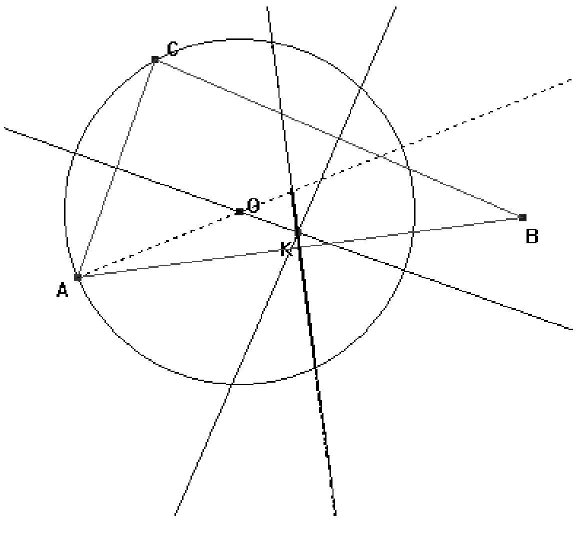
2) Asugu nüüd tipp *B* väljaspool juhtjoont. Uurime siin kahte järgmist juhtu:

- kolmnurga külg *AB* lõikab;
- kolmnurga külg *AB* puutub juhtjoont.

Kui kolmnurga külg *AB* lõikab juhtjoont, siis on samuti jäljeks lahtine poolsirge (vt joonis 4.55) ja põhjendus analoogiline eelmise juhuga. Kui aga kolmnurga külg *AB* puutub juhtjoont, on jäljeks sirge (vt. joonis 4.56). Näitame seda. Paneme tähele, et tipu *C* lohistamisel kolmnurga tippude orientatsioon ei saa muutuda. Seetõttu pole ka



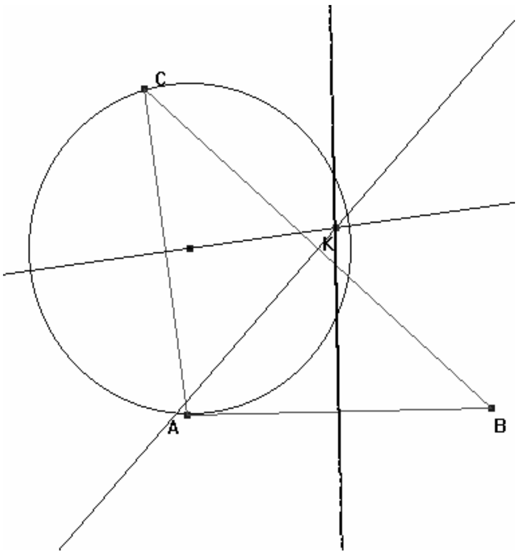
Joonis 4.54.



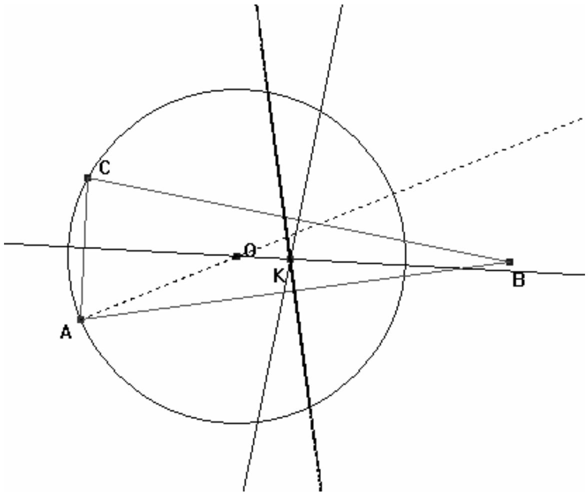
Joonis 4.55.

keskristsirgete lõikepunkti *K* liikumisele mööda külje *AB* keskristsirget mingeid kitsendusi ja jäljeks ongi selle külje keskristsirge.

Kui lubada tippude orientatsiooni muutumist, saame mõlemal juhul (tipp *B* asub seespool juhtjoont või tipp *B* asub väljaspool juhtjoont ja punkt *A* pole puutepunkt) jäljeks lõigu *AB* keskristsirge, va selle lõikepunkt raadiusega *AO* või selle pikendusega (vt joonis 4.57). Sellisel juhul kolmnurga *ABC* tipud *A* ja *C* kattuvad.



Joonis 4.56.



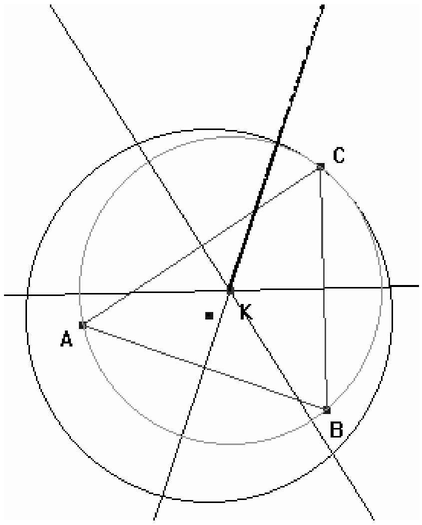
Joonis 4.57.

<u>Lahendus 2.18.</u>

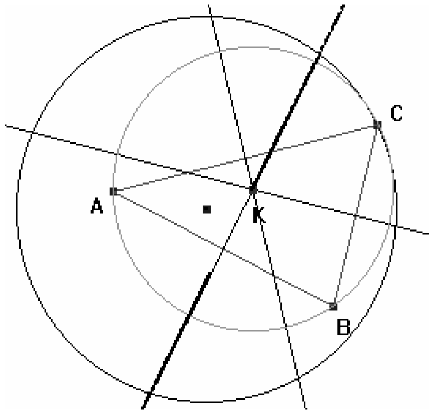
1) Asugu tipud *A* ja *B* seespool juhtjoont.

Näeme, et jäljeks on kiirt (vt. joonis 4.58). Meid huvitab jäljepunktide minimaalne kaugus küljest *AB*. See minimaalne kaugus saavutatakse siis, kui kolmnurga *ABC* ümberringjoone raadius on minimaalne. Kõige väiksema võimaliku raadiuse saame siis, kui kolmnurga ümberringjoon puudutab seesmiselt juhtjoont.

Lubame nüüd kolmnurga tippude orientatsioonil muutuda. Sel juhul saame jäljeks kaks kiirt (vt joonis 4.59), kuna tekib kaks võimalust, mil kolmnurga ümberringjoon puutub juhtjoont seesmiselt.



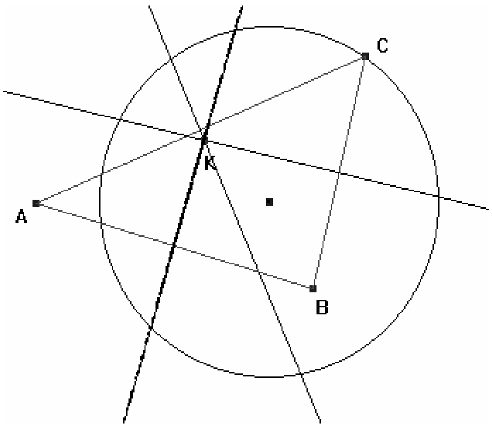
Joonis 4.58.

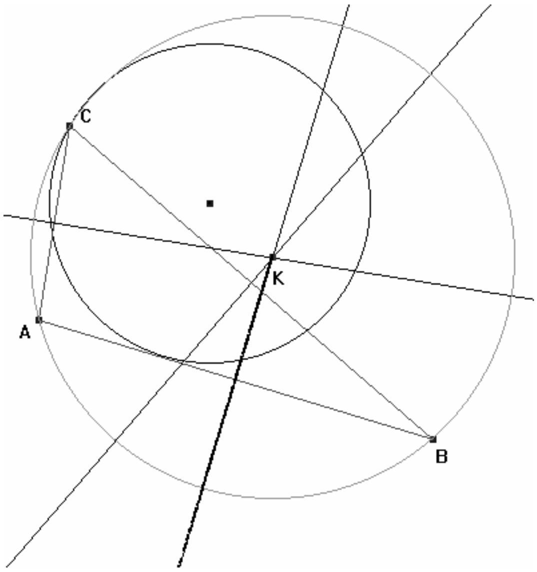


Joonis 4.59.

2) Asugu üks tippudest seespool, teine väljaspool juhtjoont.

Asugu näiteks tipp *A* väljaspool ja tipp *B* seespool juhtjoont. Sellisel juhul pole punktil





Joonis 4.60.

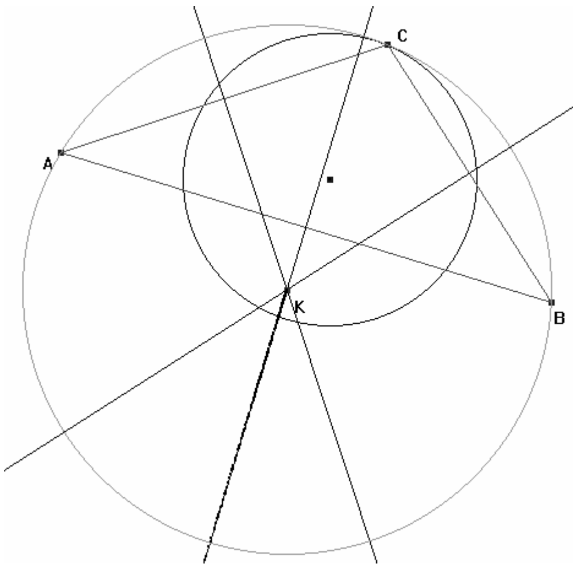
Joonis 4.61.

K mingeid kitsendusi lõigu *AB* keskristsirgel liikumiseks. Seega on jäljeks sirge, so. külje *AB* keskristsirge (vt joonis 4.60).

Samuti on jäljeks sirge, kui lubame kolmnurga tippude orientatsioonil muutuda.

3) Asugu tipud *A* ja *B* mõlemad väljaspool juhtjoont. Vaatleme siin kolme erinevat juhtu: küljel *AB* on juhtjoonega üks, kaks või mitte ühtegi ühist punkti.

Uurime kõigepealt juhtu, kui külg *AB* on juhtjoonele puutujaks (vt. joonis 4.61). Siis tipu *C* lohistamisel kolmnurga tippude orientatsioon ei muutu ning kolmnurga ümberringjoon ja juhtjoon puutuvad seesmiselt vaid ühe korra (vt sama ülesande punkt 1). Seega on nüüd jäljeks üks kiir, mille alguspunkt vastab olukorrale, kus juhtjoon ja kolmnurga ümberringjoon puutuvad.

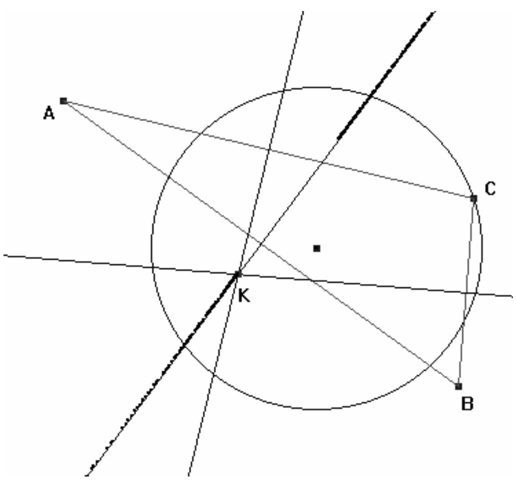


Joonis 4.62.

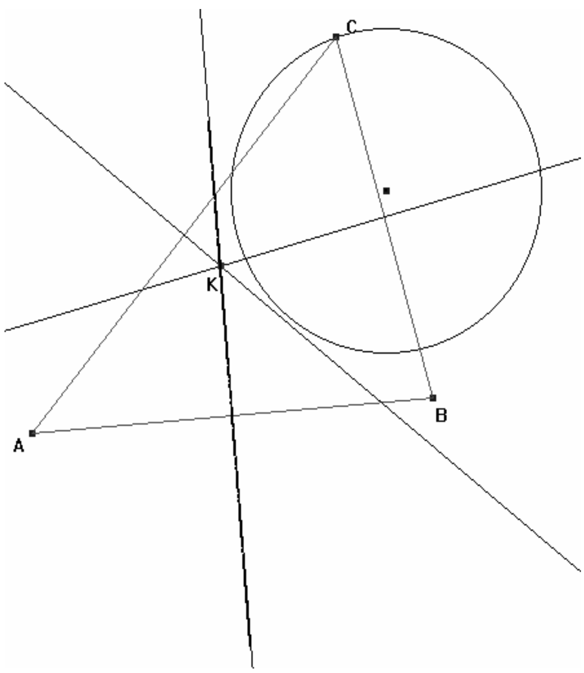
Uurime teisena juhtu, kui külg *AB* lõikab ringjoont kahes punktis. Analoogiliselt punktis 1) saaduga puutuvad ka nüüd vastavad ringjooned seesmiselt üks kord. Seega on jäljeks kiir (vt joonis 4.62).

Kui lubame kolmnurga tippude orientatsioonil muutuda, siis on kaks võimalust ringjoonte seesmiseks puutumiseks. Seega on jäljeks kaks kiirt (vt joonis 4.63).

Uurime lõpuks juhtu, kui külg *AB* ei lõika juhtjoont üheski punktis. Paneme tähele, et



Joonis 4.63.



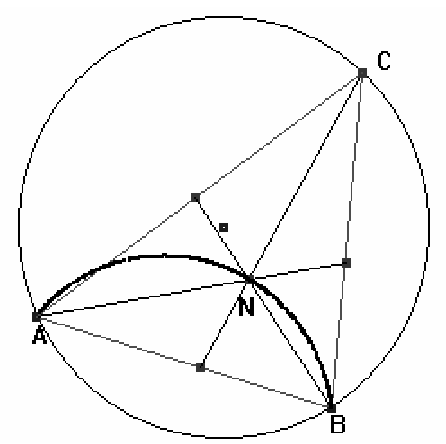
Joonis 4.64.

antud juhul tipu C lohistamisel kolmnurga tippude orientatsioon ei muutu ja kolmnurk ABC ei kõdu. Seega ei saa ka jäljepunktid mööda külje AB keskristsirget tõkestamatult kaugeneda. Näitame, et jäljeks on nüüd sirglõik (vt joonis 4.64).

Lähenedes päri- või vastupäeva tipuga C küljele AB, kaugeneb keskristsirgete lõikepunkt K küljest AB tõkestatult mööda külje AB keskristsirget. Sellisel juhul puutuvad kolmnurga ümberringjoon ja juhtjoon kord seesmiselt, kord välimiselt. Meid huvitab, kui kaugele lõigust AB saab punkt K maksimaalselt liikuda. Maksimaalne kaugus saavutatakse siis, kui kolmnurga ümberringjoone raadius on suurim. Raadius on aga suurim juhul, kui nimetatud ringjooned puutuvad kas seesmiselt või siis välimiselt.

<u>Lahendus 2.19.</u>

Näeme, et jäljeks on ringjoone kaar (vt joonis 4.65), va selle otspunktid A ja B. Paneme tähele, et $\angle ACB$ on piirdenurk. Seega tipu C lohistamisel mööda juhtjoont jääb nurga ACB suurus konstantseks ning muutuvad vaid $\angle CAB$ ja $\angle ABC$. Samuti jääb muutumatuks nurga ANB suurus, kusjuures



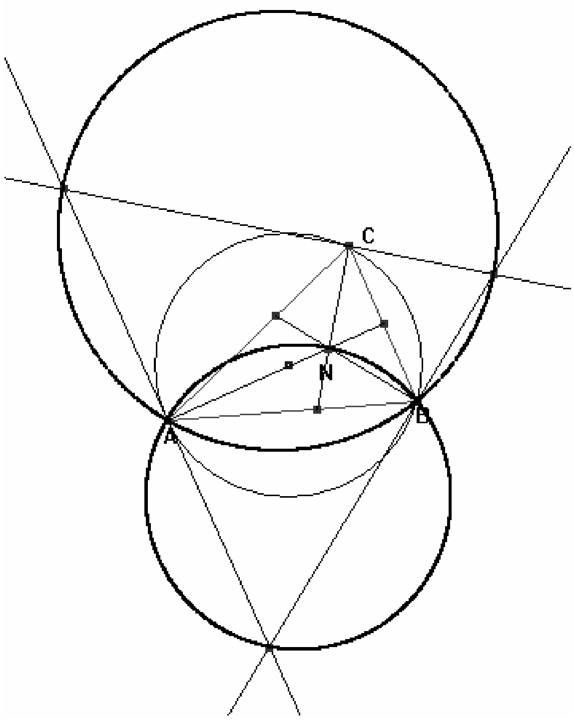
Joonis 4.65.

$$\angle ANB = 180° - \frac{1}{2}\angle CAB - \frac{1}{2}\angle ABC =$$
$$= 180° - \frac{1}{2}(\angle CAB + \angle ABC) =$$
$$= 180° - \frac{1}{2}(180° - \angle ACB) = 90° + \frac{1}{2}\angle ACB.$$

Nii $\angle ACB$ kui ka $\angle ANB$ toetuvad kaarele AB. Kuna $\angle ANB$ on muutumatu, siis on ta mingi ringjoone kõõlule AB toetuvaks piirdenurgaks. Seetõttu on punkti N jäljeks selle ringjoone kaar.

Lahendus 2.20.

Olgu kolmnurga *ABC* kõik tipud juhtjoonel. Lubades kolmnurga tippude orientatsioonil muutuda, saame kolmnurga *ABC* sisenurkade poolitajate lõikepunkti *N* ning kolmnurga välisnurkade poolitajate lõikepunktide jälgedeks kaks lõikuvat ringjoont (vt joonis 4.66).



Joonis 4.66.

Lahendus 2.21.

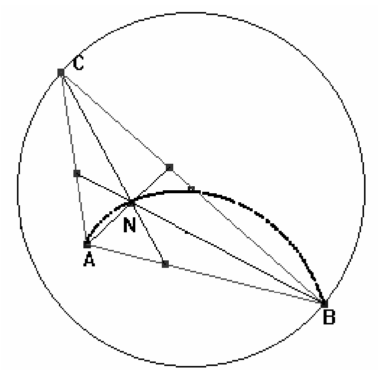
Antud ülesande korral on võimalik vaadelda kahte erijuhtu:

1) kolmnurga üks tipp asub seespool juhtjoont;

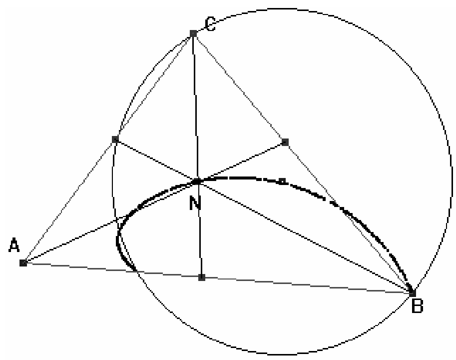
2) kolmnurga üks tipp asub väljaspool juhtjoont.

Asugu kolmnurga tipp *A* seespool juhtjoont. Sellisel juhul on nurgapoolitajate lõikepunkti *N* jäljeks mingi kaar, va punktid *A* ja *B* (vt joonis 4.67).

Asugu nüüd tipp *A* väljaspool juhtjoont. Sel juhul on omakorda kaks võimalust: kolmnurga külg *AB* kas lõikab juhtjoont või asub juhtjoone puutujal. Kui kolmnurga külg *AB* lõikab juhtjoont, siis on nurgapoolitajate lõikepunkti *N* jäljeks taas mingi kaar, va külje *AB* ja juhtjoone lõikepunktid (vt joonis 4.68).

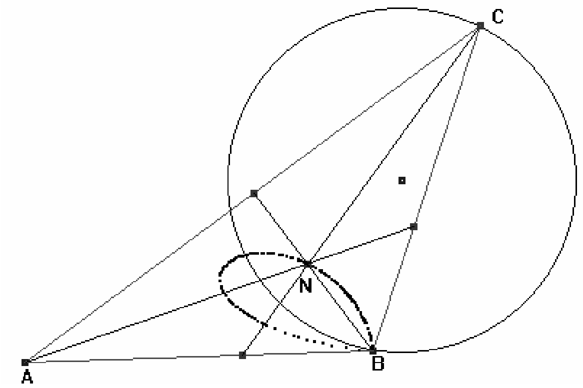


Joonis 4.67.



Joonis 4.68.

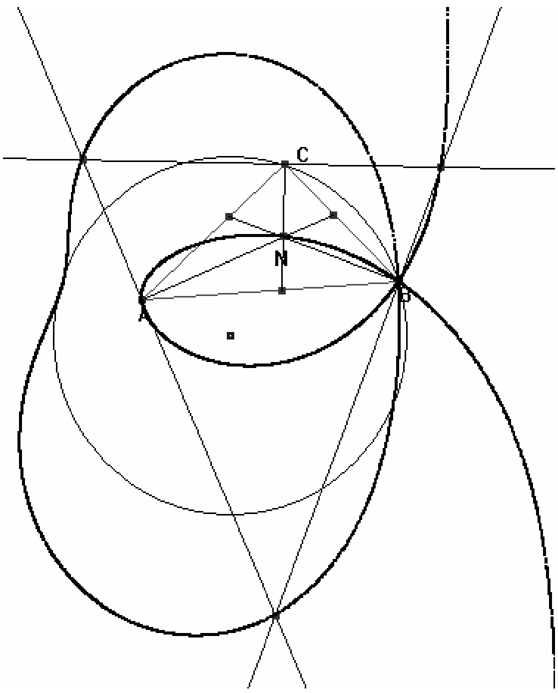
Kui aga kolmnurga külg *AB* asub juhtjoone puutujal, siis kolmnurga tippude orientatsioon ei muutu ning nurgapoolitajate lõikepunkti *N* jäljeks on silmus, va punkt *B* (vt joonis 4.69).



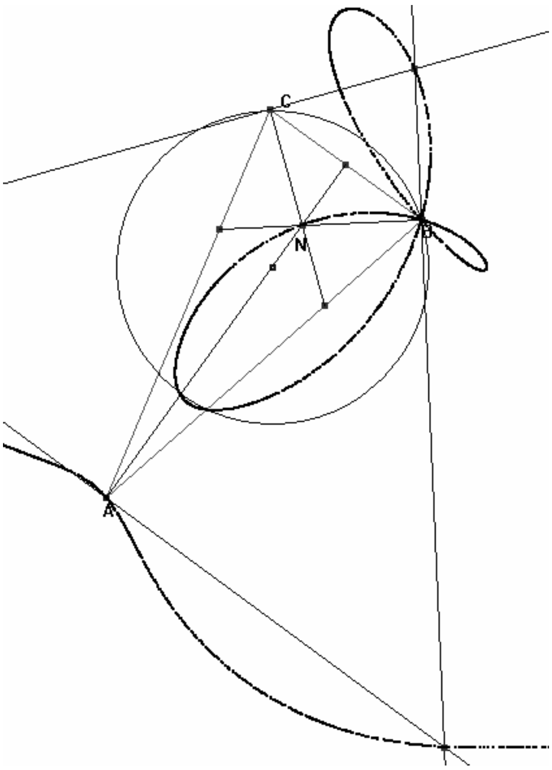
Joonis 4.69.

Lahendus 2.22.

Asugu kolmnurga *ABC* tipud *B* ja *C* (vabalt lohisev) juhtjoonel ning tipp *A* seespool juhtjoont. Lubades kolmnurga tippude orientatsioonil muutuda, saame joonisel 4.70 toodud kolmnurga sisenurkade poolitajate lõikepunkti *N* ning kolmnurga välisnurkade poolitajate lõikepunktide jäljed.

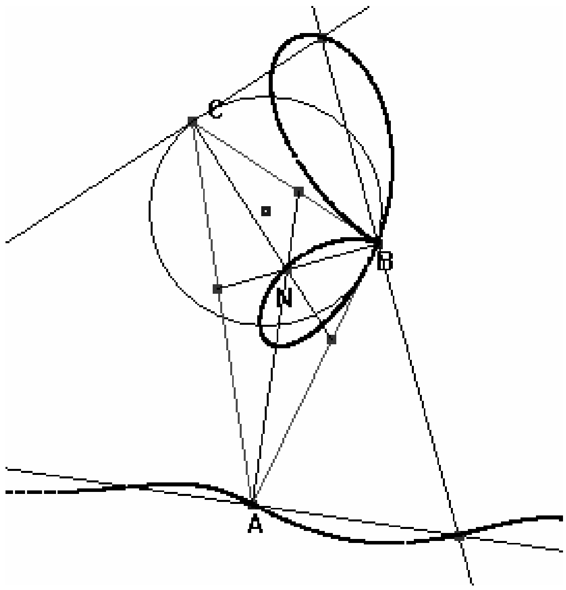


Joonis 4.70.



Joonis 4.71.

Olgu nüüd kolmnurga ABC tipp A väljaspool juhtjoont. Sel juhul saame joonistel 4.71 ja 4.72 (külg AB vastavalt lõikab ja puutub juhtjoont) toodud kolmnurga sisenurkade poolitajate lõikepunkti N ja välisnurkade poolitajate lõikepunktide jäljed.



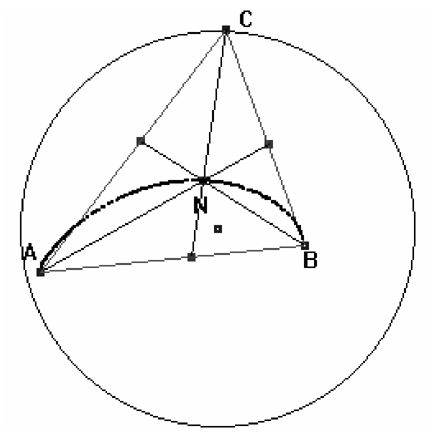
Joonis 4.72.

<u>Lahendus 2.23.</u>

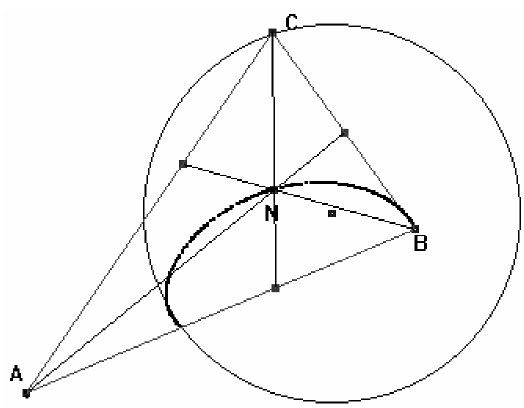
Asugu tipud A ja B seespool juhtjoont. Sellisel juhul on jäljeks mingi kaar AB, va punktid A ja B (vt joonis 4.73).

Asugu üks tipp A seespool, teine B väljaspool juhtjoont. Jäljeks on mingi kaar, va tipp B ning juhtjoone ja külje AB lõikepunkt (vt joonis 4.74).

Asugu kolmnurga tipud A ja B väljaspool juhtjoont. Vaatleme siin kolme erijuhtu: külg AB omab juhtjoonega ühe, kaks või mitte ühtegi lõikepunkti.

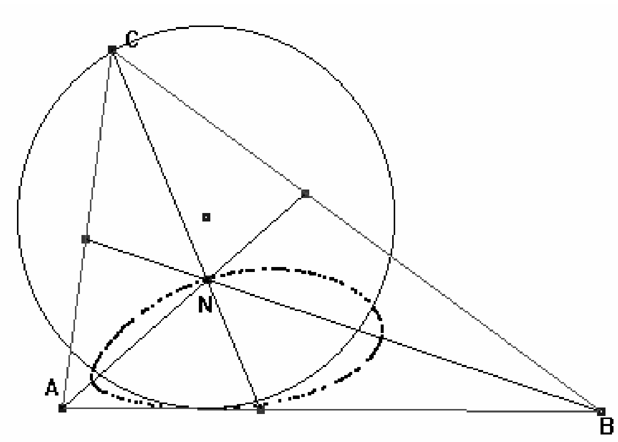


Joonis 4.73.



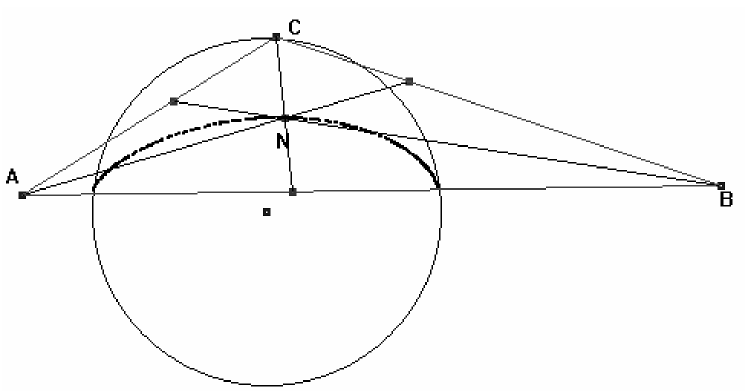
Joonis 4.74.

Olgu esiteks külg *AB* juhtjoonele puutujaks. Sellisel juhul tipu *C* lohistamisel kolmnurga tippude orientatsioon ei muutu. Jäljeks on mingi ovaal[10], va juhtjoone ja külje *AB* puutepunkt (vt joonis 4.75).



Joonis 4.75.

Olgu nüüd küljel *AB* juhtjoonega kaks lõikepunkti. Sellisel juhul on jäljeks mingi kaar, va. juhtjoone ja külje *AB* lõikepunktid (vt. joonis 4.76).

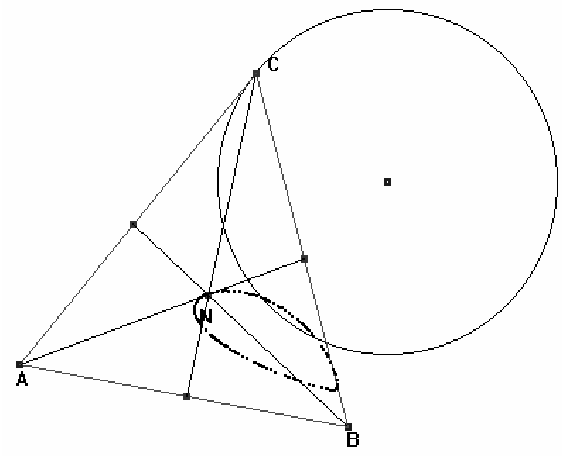


Joonis 4.76.

Vaatleme viimaks juhtu, kui külg *AB* ei lõika juhtjoont. Sellisel juhul tipu *C* lohistamisel kolmnurga tippude orientatsioon ei muutu. Jäljeks tekib mingi ovaal (vt. joonis 4.77).

---

[10] **Ovaal** – kumerat hulka piirav kinnine tasandiline joon [6].

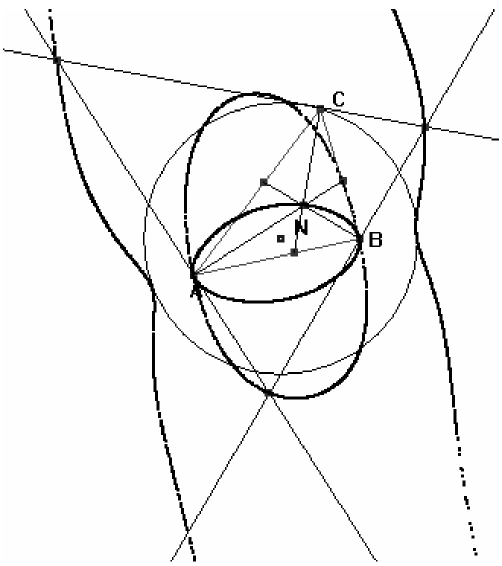


Joonis 4.77.

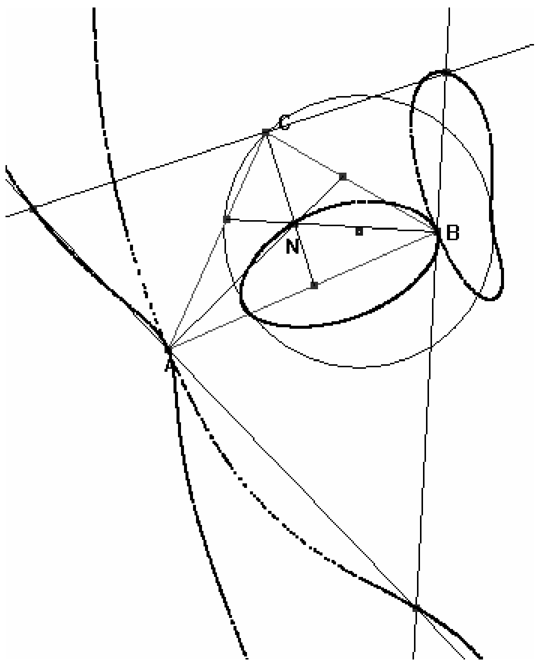
Lahendus 2.24.

Olgu kolmnurga *ABC* tipp *C* (vabalt lohisev) juhtjoonel ja tipud *A* ja *B* asuvad seespool juhtjoont. Lubades tippude orientatsioonil muutuda, saame joonisel 4.78 toodud kolmnurga sisenurkade poolitajate lõikepunkti *N* ja välisnurkade poolitajate lõikepunktide jäljed.

Kui üks tippudest asub seespool, teine väljaspool juhtjoont, siis saame joonisel 4.79 toodud jälje.

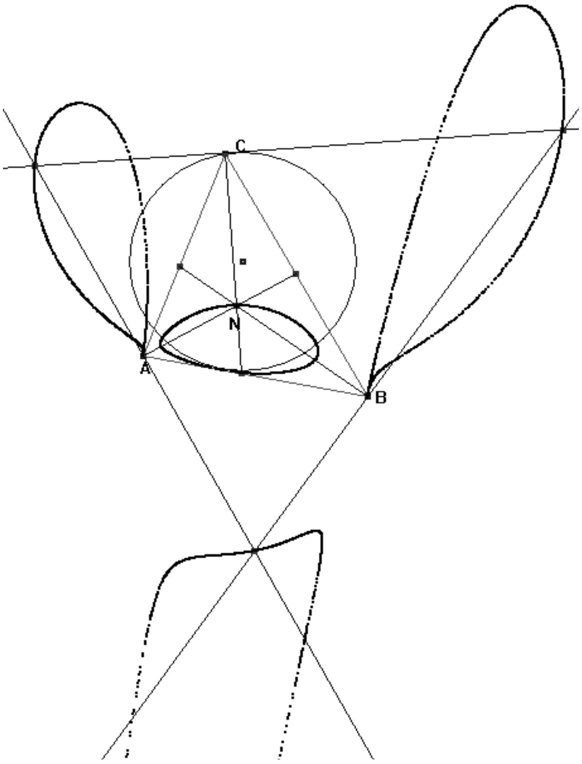


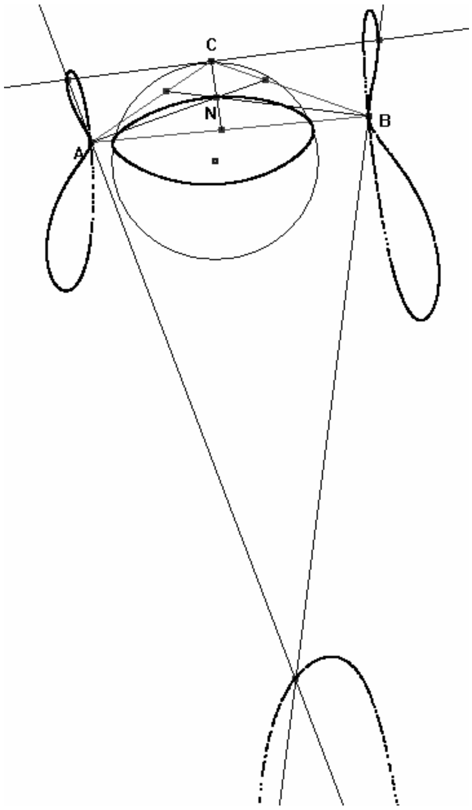
Joonis 4.78.



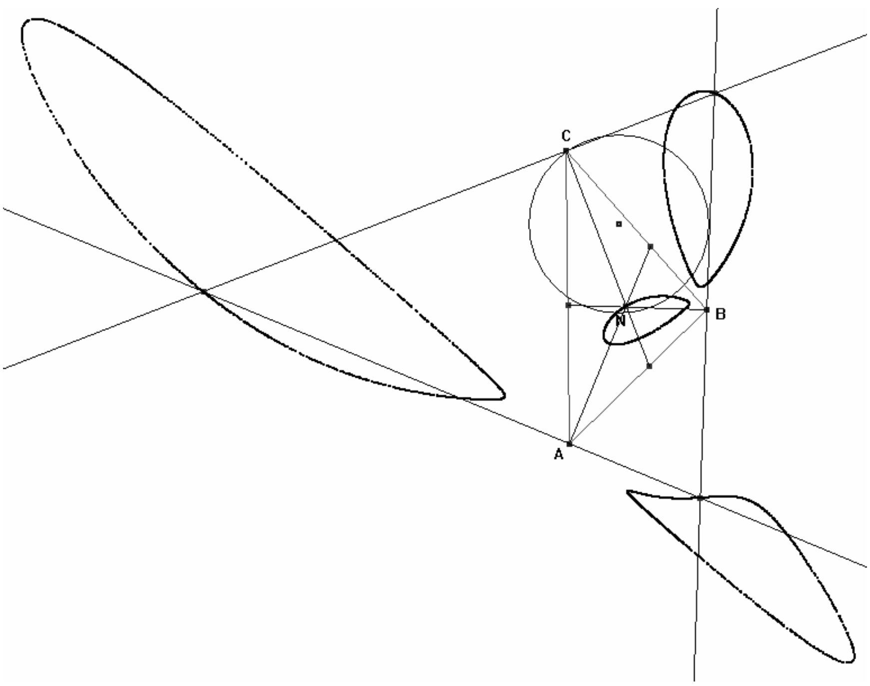
Joonis 4.79.

Asugu nüüd tipud *A* ja *B* väljaspool juhtjoont. Kui küljel *AB* on juhtjoonega üks, kaks ühist punkti või ühised punktid puuduvad, saame vastavalt joonistel 4.80, 4.81, ja 4.82 toodud jäljed.





Joonis 4.80. Joonis 4.81.



Joonis 4.82.

Lahendus 2.25.

Näeme, et jäljeks on ringjoone mingi kaar (vt joonis 4.83).

Tõestamisel kasutame koordinaatteljestiku abi. Asugu juhtjoone keskpunkt y-teljel ja kolmnurga külg *AB* x-teljel selliselt, et külje keskpunkt on punktis *D*(0; 0)[11] (vt. joonis 4.84). Olgu sellisel juhul tipu *C*, mediaanide lõikepunkti *M* ja juhtjoone keskpunkti *O* koordinaadid vastavalt $C(x_C; y_C)$, $M(x; y)$ ja $O(0; b)$. Siis on juhtjoone võrrandiks

$$x_C^2 + (y_C - b)^2 = r^2,$$

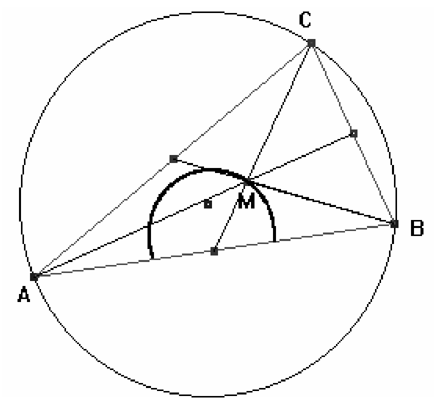
kus *r* on juhtjoone raadius. Jälje võrrandi leidmiseks projekteerime punktid *M* ja *C* x-teljele ja tähistame projektsioonid vastavalt tähtedega *N* ja *G*. Kuna mediaanide lõikepunkti omaduse tõttu $\frac{DM}{DC} = \frac{1}{3}$, siis kiirteteoreemist saame, et ka $\frac{DN}{DG} = \frac{1}{3}$ ehk $\frac{x}{x_C} = \frac{1}{3}$, millest $x_C = 3x$. Samuti $\frac{MN}{CG} = \frac{1}{3}$ ehk $\frac{y}{y_C} = \frac{1}{3}$, millest $y_C = 3y$.

Kuna punkt *C* asub juhtjoonel, siis tema koordinaadid x_C ja y_C peavad rahuldama juhtjoone võrrandit

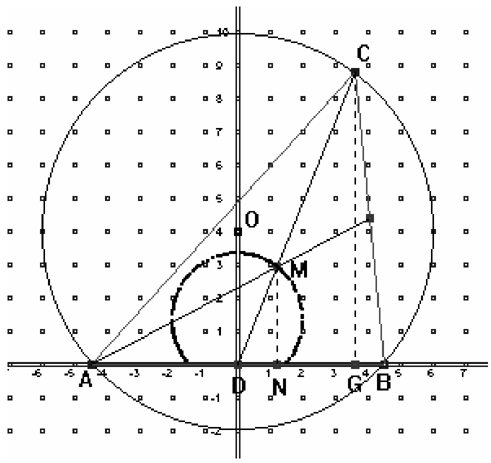
$$x_C^2 + (y_C - b)^2 = r^2.$$

Seega saame jälje võrrandiks

$$(3x)^2 + (3y - b)^2 = r^2$$



Joonis 4.83.



Joonis 4.84.

[11] Teljestiku saab alati selliselt valida, et see kehtiks.

ehk pärast teisendamist

$$x^2 + \left(y - \frac{b}{3}\right)^2 = \left(\frac{r}{3}\right)^2.$$

Seega on jäljeks mingi ringjoone kaar.

Paneme tähele, et lubades kolmnurga tippude orientatsiooni muutumist, tekib jäljeks ringjoon keskpunktiga $O'(0;\frac{b}{3})$ ja raadiusega $r' = \frac{r}{3}$.

Lahendus.2.26.

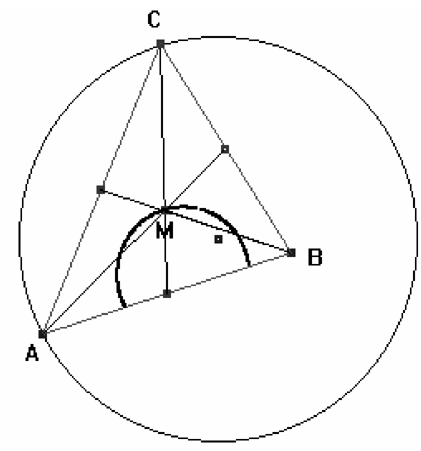
Asugu esiteks tipp *B* seespool juhtjoont. Näeme, et jäljeks on taas ringjoone kaar (vt joonis 4.85).

Tõestamisel kasutame taas koordinaatteljestiku abi. Asugu kolmnurga külg *AB* x-teljel ja selle külje keskpunkt *D* nullpunktis (vt joonis 4.86). Olgu sellisel juhul tipu *C*, mediaanide lõikepunkti *M* ja juhtjoone keskpunkti *O* koordinaadid vastavalt $C(x_C; y_C), M(x; y)$ ja $O(a; b)$. Juhtjoone võrrandiks on nüüd

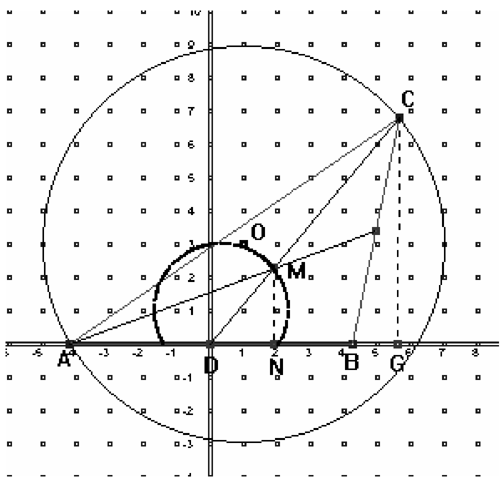
$$(x_C - a) + (y_C - b)^2 = r^2,$$

kus *r* on juhtjoone raadius. Analoogiliselt eelmise ülesande lahendusega saame, et $x_C = 3x$ ja $y_C = 3y$. Asetades saadud koordinaadid juhtjoone võrrandisse, saame jälje võrrandiks

$$(3x - a)^2 + (3y - b)^2 = r^2$$



Joonis 4.85.



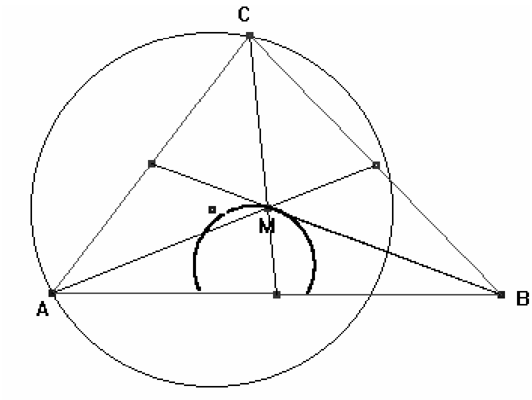
Joonis 4.86.

ehk pärast teisendamist

$$\left(x-\frac{a}{3}\right)^2+\left(y-\frac{b}{3}\right)^2=\left(\frac{r}{3}\right)^2.$$

Seega on jäljeks mingi ringjoone kaar.

Paneme jällegi tähele, et lubades kolmnurga tippude orientatsiooni muutumist, tekib jäljeks ringjoon keskpunktiga $O'(\frac{a}{3};\frac{b}{3})$ ja raadiusega $r'=\frac{r}{3}$.



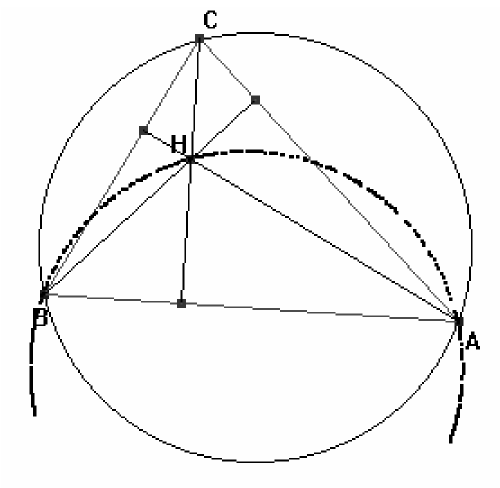
Joonis 4.87.

Asugu nüüd tipp B väljaspool juhtjoont. Vastav jälg on esitatud joonisel 4.87. Tõestus on analoogiline eelmise juhuga.

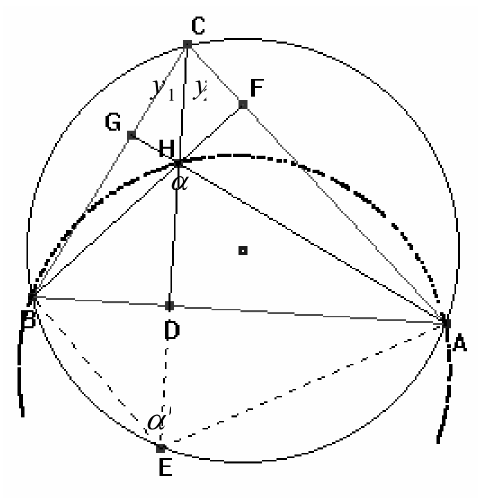
Lahendus 2.28.

Näeme, et jäljeks on ringjoone mingi kaar, mis läbib kolmnurga tippe A ja B (vt joonis 4.88). Näitame, et see on juhtjoonega sama raadiusega ringjoone kaar.

Näitame esmalt, et kõrguste lõikepunkti jäljeks on mingi ringjoone kaar. Olgu $\angle BHA=\alpha$ ja $\angle BEA=\alpha'$. Jaotagu kõrgus CD tipu C juures oleva nurga γ osadeks γ_1 ja γ_2 (vt joonis 4.89), st. $\gamma=\gamma_1+\gamma_2$. Teame, et ristuvate haaradega nurgad on



Joonis 4.88.



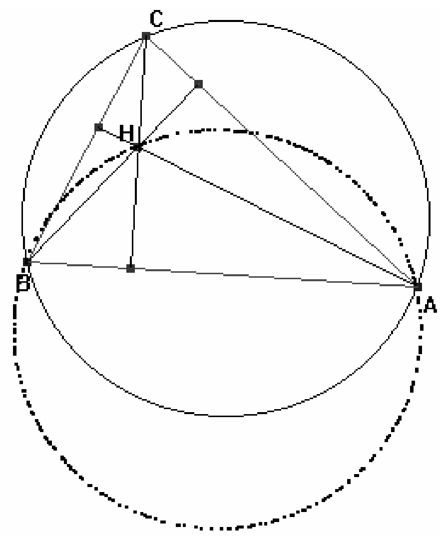
Joonis 4.89.

võrdsed. Seega $\angle$ GAB $=\gamma_1$ ja $\angle\ FBA =\gamma_2$. Siit saame, et α + γ = 180°, millest $\alpha = 180° - \gamma$. Kui nihutada tippu *C* mööda ringjoont, siis jääb γ suurus konstantseks (kui kaarele *AB* toetuv piirdenurk). Seega jääb ka α suurus muutumatuks, st ka α on mingi ringjoone kaarele *AB* toetuv piirdenurk. Järelikult kõrguste lõikepunkti *H* jäljeks on mingi ringjoone kaar.

Näitame nüüd, et jäljeks oleva ringjoone kaare raadius on võrdne juhtjoone raadiusega. Selleks piisab, kui näitame, et kolmnurga *ABC* kõrguse *CD* pikenduse ja juhtjoone lõikepunkt *E* on kolmnurga kõrguste lõikepunkti *H* peegeldus küljest *AB*.

Kõõlnelinurgas *ACBE* $\alpha' + \gamma = 180°$, kust $\alpha' = 180° - \gamma$. Eespool me saime, et $\alpha = 180° - \gamma$. Seega nurk α=α′ iga tipu *C* asendi korral. Kuna nurgad asuvad sümmeetriliselt külje *AB* suhtes (nt $\angle BAE = \gamma_1 = \angle GAB$), siis ka punktide *H* ja *E* asend on teineteise suhtes sümmeetriline. Seega tekib jäljeks juhtjoonega sama raadiusega ringjoone kaar.

Kui me lubame kolmnurga tippude orientatsioonil muutuda, siis on jäljeks ringjoon, va kaks punkti (*millised?*) (vt joonis 4.90).



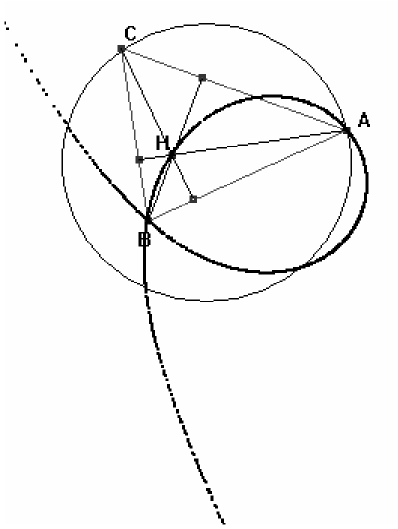
Joonis 4.90.

<u>Lahendus 2.29.</u>

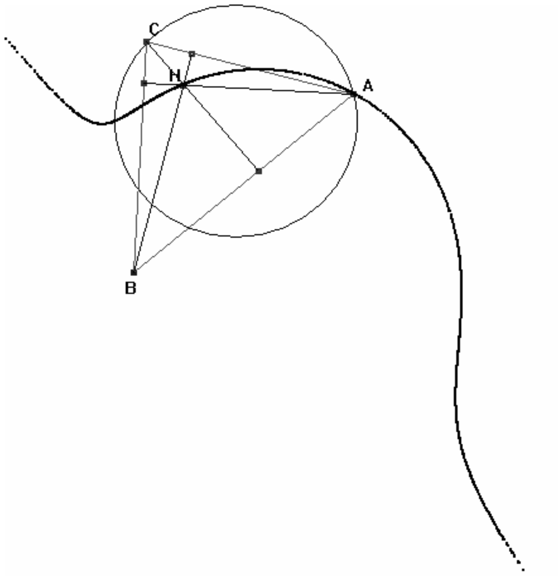
Asugu kolmnurga *ABC* üks tippudest

1) seespool juhtjoont;
2) väljaspool juhtjoont

Joonistel 4.91 ja 4.92 on toodud vastavad kõrguste lõikepunkti *H* jäljed. Kolmnurga tippude orientatsioonil on lubatud muutuda.



Joonis 4.91.

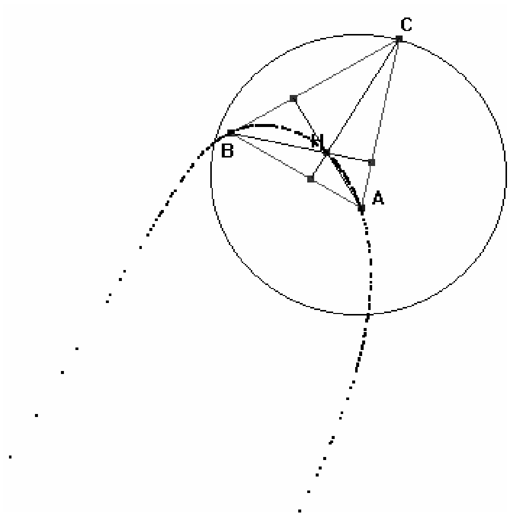


Joonis 4.92.

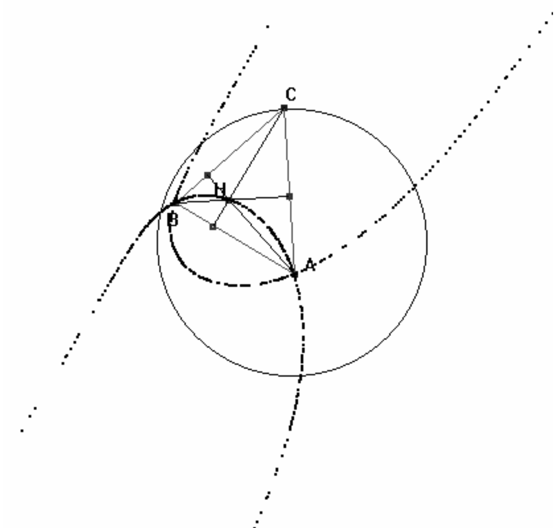
Lahendus 2.30.

1) Asugu mõlemad tipud *A* ja *B* seespool juhtjoont. Sel juhul on kõrguste lõikepunkti H jäljeks joonisel 4.93 toodud kõver.

   Lubades kolmnurga tippude orientatsioonil muutuda, on kõrguste lõikepunkti *H* jäljeks kaks kõverat, mis lõikavad üksteist punktides *A* ja *B* (vt joonis 4.94).

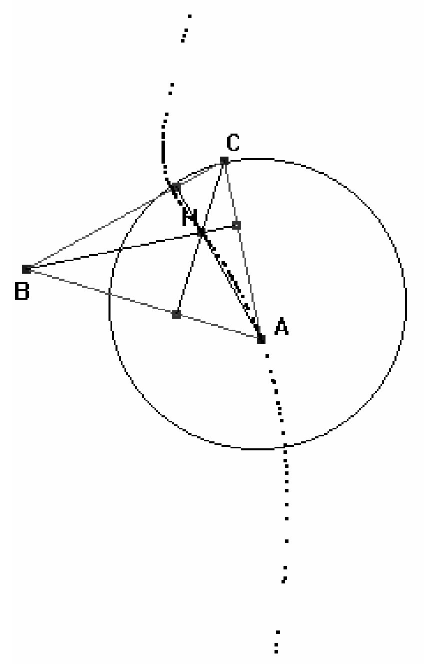


Joonis 4.93.

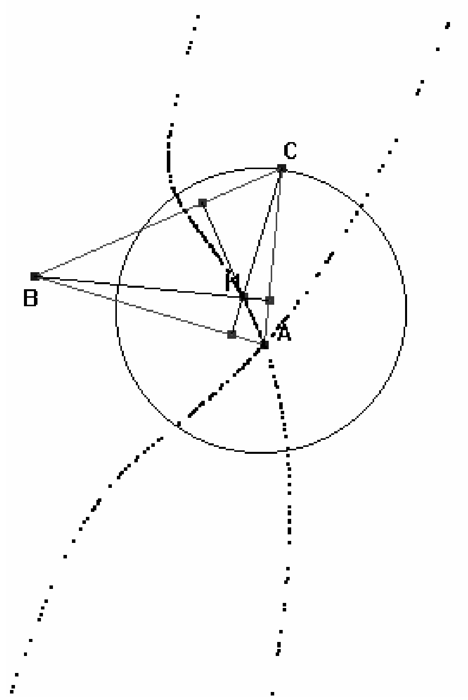


Joonis 4.94.

2) Asugu tipp A seespool ja tipp B väljaspool juhtjoont. Sel juhul on kõrguste lõikepunkti jäljeks kõver (vt joonis 4.95). Lubades kolmnurga tippude orientatsioonil muutuda, tekivad jäljeks kaks ühes punktis lõikuvat kõverat (vt joonis 4.96).

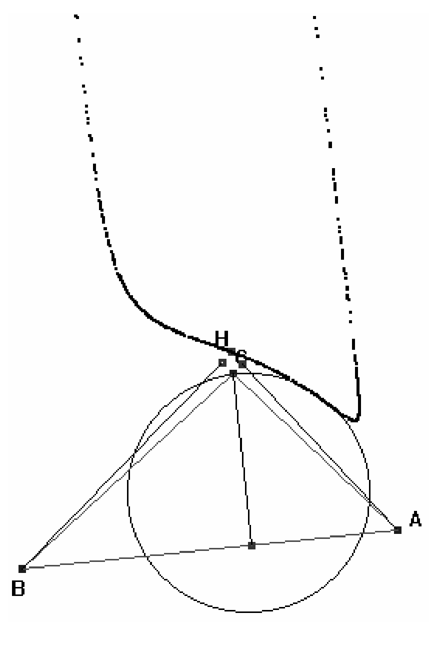


Joonis 4.95.

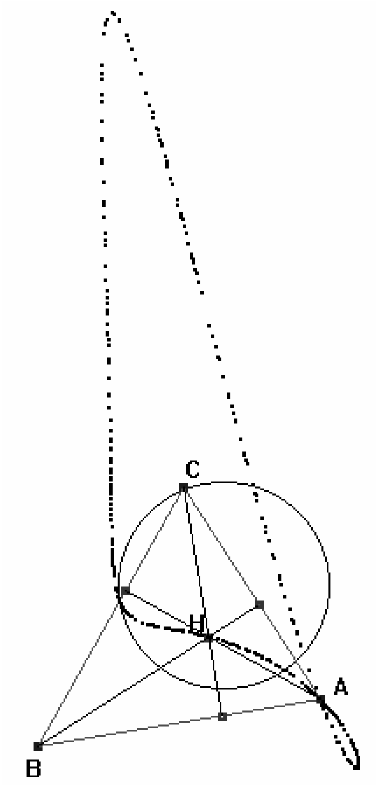


Joonis 4.96.

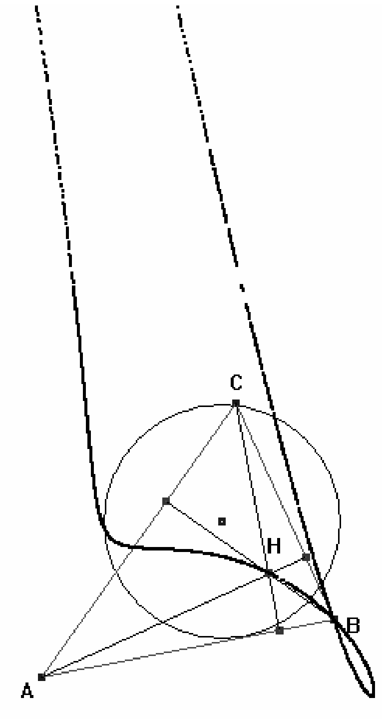
3) Asugu mõlemad tipud A ja B väljaspool juhtjoont. Joonistel 4.97, 4.98 ja 4.99 (küljel AB on juhtjoonega vastavalt kaks, mitte ühtegi ja üks ühine punkt) on toodud kõrguste lõikepunkti jälg. (*Millisel juhul on lookustel üks, kaks või mitte ühtegi silmust?*)



Joonis 4.97.



Joonis 4.98.



Joonis 4.99.

4.3. Peatüki 3 ülesannete lahendused

<u>Lahendus 3.1.</u>

<u>Juhised.</u>

- Asetage punkt *A* koordinaatide alguspunkti ja selle lähedusse vaba punkt *L* ning koordinaatvõrgupunkt *B* x-teljele.
- Konstrueerige ringjoon keskpunktiga *A* ja raadiusega *AL*.
- Konstrueerige ringjoon keskpunktiga *B* ja raadiusega $\frac{1}{2}AL$.
- Fikseerige kahe saadud ringjoone lõikepunktid *X* ja *Y* ning leidke nende punktide jäljed, lohistades punkti *L* vabalt mööda ekraani.

Näeme, et kahe punkti *A* ja *B* lookuseks on ringjoon (vt joonis 4.100).

Leiame lookuse võrrandi. Olgu punktid koordinaatidega $X(x; y)$,
$A(0; 0)$ ja $B(p; 0)$. Teame, et $XA=2XB$ ehk koordinaatides

$$\sqrt{x^2+y^2} = 2\sqrt{(x-p)^2+y^2}$$

ehk

$$x^2+y^2 = 4x^2-8xp+4p^2+4y^2$$

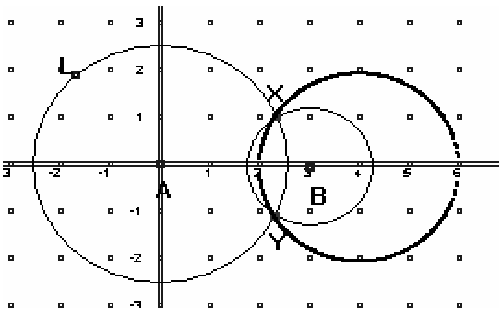
ehk

$$x^2-\frac{8}{3}xp+\frac{4}{3}p^2+y^2 = 0$$

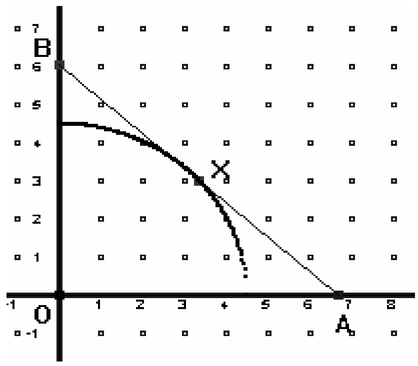
ehk

$$\left(x-\frac{4}{3}p\right)^2+y^2 = \left(\frac{2}{3}p\right)^2.$$

Seega jäljeks on ringjoon keskpunktiga $\left(\frac{4}{3}p;0\right)$ ja raadiusega $\frac{2}{3}p$.



Joonis 4.100.



Joonis 4.101.

<u>Lahendus 3.2.</u>

<u>Juhised.</u>

- ❖ Asetage koordinaatvõrgu punkt koordinaatide alguspunkti. Tähistage see tähega *O*. Nurga konstrueerimiseks asetage x- ja y-teljele kummalegi koordinaatvõrgupunkt. Konstrueerige punkti *O* läbivad sirged *s* ja *t*, mis kattuvad vastavalt x- ja y-teljega.
- ❖ Asetage vaba punkt *A* sirgele *s* ja kinnistage see. Konstrueerige fikseeritud raadiusega ringjoon keskpunktiga *A*. Fikseerige ringjoone ja sirge *t* lõikepunkt *B*.
- ❖ Peitke ringjoon.

- Konstrueerige lõik *AB*. Fikseerige selle keskpunkt *X*.
- Konstrueerige punkti *X* jälg.

Jooniselt 4.101 on näha, et otsitava lõigu *AB* keskpunkti *X* jäljeks on ringjoone kaar. Veendume selles.

Asugu antud täisnurk koordinaattasandi esimeses veerandis, st $O(0;0)$ ja $x, y \geq 0$. Olgu lõigu *AB* keskpunkt koordinaatidega $X(x; y)$. Siis lõigu otspunktid on koordinaatidega $A(2x;0)$ ja $B(0;2y)$. Avaldame lõigu *AB* pikkuse koordinaatides, saades

$$AB = \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2}\ .$$

Kuna *AB=a*, siis punkti *X* koordinaadid rahuldavad võrrandit

$$4x^2 + 4y^2 = a^2$$

ehk

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

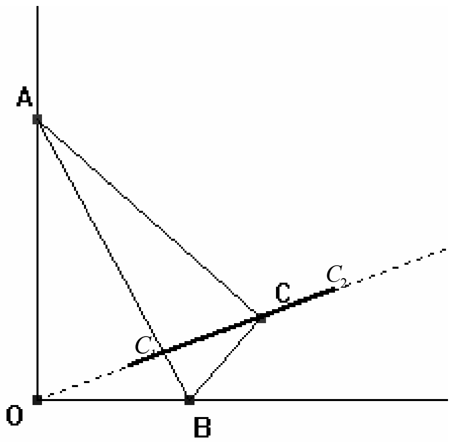
Seega punkt $X(x; y)$ asub raadiusega $\frac{a}{2}$ ringjoone kaarel.

<u>Lahendus 3.3.</u>

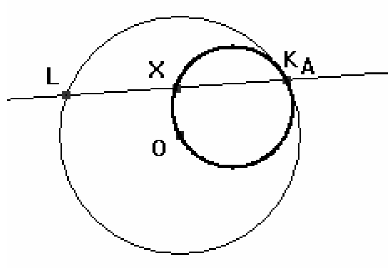
<u>Juhised.</u>

- Konstrueerige täisnurk tipuga *O*.
- Kolmnurga *ABC* hüpotenuusi *AB* konstrueerimiseks asetage konstrueeritud täisnurga ühele haarale vaba punkt *B*. Konstrueerige määratud raadiusega ringjoon keskpunktiga *B*. Fikseerige täisnurga teise haara ja ringjoone lõikepunkt *A*. Ühendage punktid *A* ja *B*.
- Kolmnurga *ABC* ühe kaateti konstrueerimiseks valige menüüst „Sõltuv objekt“ valik „Nurk sirgel (. , _ , <)“, klõpsates punktile *A*, lõigule *AB* ja sisestades nurga suuruse (suvaline teravnurk). Teine kaatet konstrueerige ristsirge abil, mis läbib punkti *B*. Fikseerige viimati konstrueeritud sirgete lõikepunkt ja tähistage see tähega *C*.
- Peitke mittevajalikud jooned ja asendage vajadusel need (nt sirged lõikudega).

Jäljeks on lõik C_1C_2 (vt joonis 4.102). Paneme tähele, et punktid *O, A, B* ja *C* asetsevad samal ringjoonel. Järelikult $\angle COB = \angle CAB$ ja tipp *C* liigub mööda kiirt *OC*. Uurime piirjuhte. Kui punktid *B* ja *O* ühtivad, siis $C = C_1$, kusjuures $BC = OC_1$. Kui nelinurk $OACB$ on ristkülik, siis $C = C_2$, kusjuures $AB = OC_2$ ($OC \le AB$, AB – ringjoone diameeter). Seega jäljeks on lõik C_1C_2 pikkusega $AB - BC$.



Joonis 4.102.

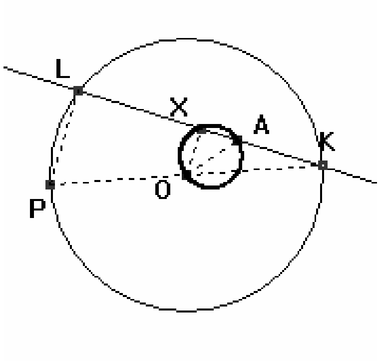


Joonis 4.103.

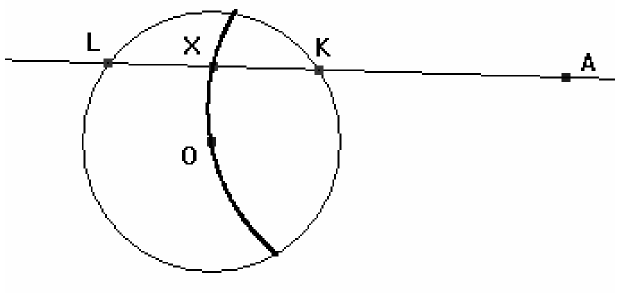
Lahendus 3.4.

1) Kui punkt *A* asub ringjoonel, on jäljeks ringjoon diameetriga *OA* (vt joonis 4.103 ja ptk I ül 1.38 tõestus).
2) Kui punkt *A* asub seespool ringjoont (vt joonis 4.104), on jäljeks samuti teine ringjoon diameetriga *OA* (erijuhul, kui punkt *O=A*, on jäljeks punkt).

   Täiendame joonist kõõluga *KP*, mis läbib ringjoone keskpunkti *O*. Teame, et $LP \parallel XO$ ja $\angle OXK = 90°$ (vt sama ül p 1 tõestust). Kuna punkt *A* kuulub kõõlule *LK,* siis punkti *L* lohistamisel toetub $\angle OXK$ alati lõigule *OA*. Seega lookuseks on



Joonis 4.104.



Joonis 4.105.

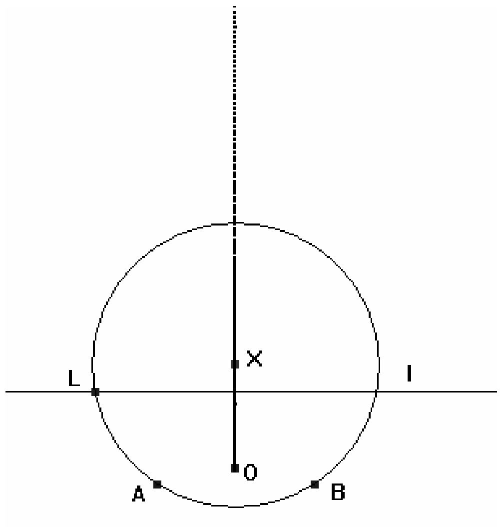
ringjoon diameetriga *OA*.

3) Kui punkt *A* asub väljaspool ringjoont (vt joonis 4.105), on jäljeks diameetriga *OA* ringjoone on kaar. Tõetus on analoogiline eelmises punktis tõestatuga.

Lahendus 3.5.

Juhised.

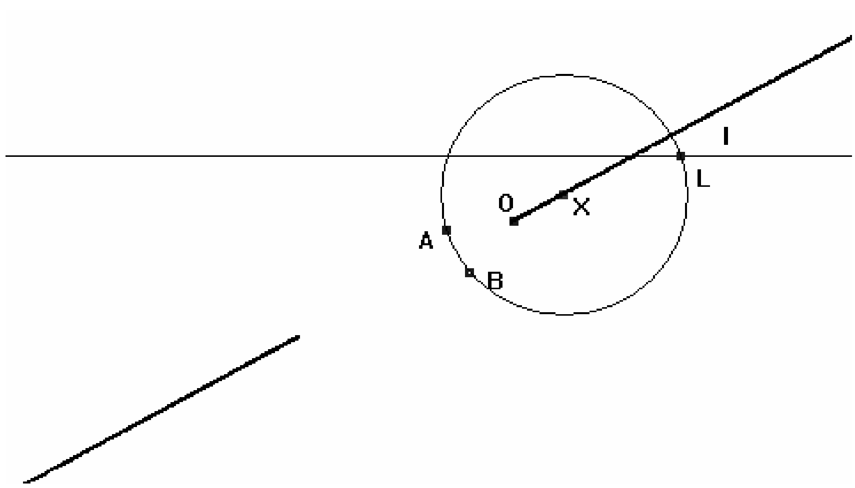
- ❖ Fikseerige sirge *l*.
- ❖ Valige vabad punktid *A* ja *B* ühel pool sirget ning punkt *L* kinnitatuna sirgele *l*.
- ❖ Konstrueerige kolmnurga *ABL* ümberringjoone keskpunkt *X*.
- ❖ Peitke üleliigsed jooned.



Joonis 4.106.

1) Asugu punktid *A* ja *B* sirgega *l* paralleelsel sirgel. Sel juhul on jäljeks kiir *OX* (vt joonis 4.106), mis asub lõigu *AB* keskristsirgel (vt ptk II ül 2.5 tõestus).

2) Asugu punktid *A* ja *B* sirgega *l* lõikuval sirgel. Sel juhul kolmnurga *LAB* tippude orientatsioon muutub ja jäljeks on seetõttu ka kaks kiirt (vt joonis 4.107), mis asuvad samuti lõigu *AB* keskristsirgel.



Joonis 4.107.

Lahendus 3.6.

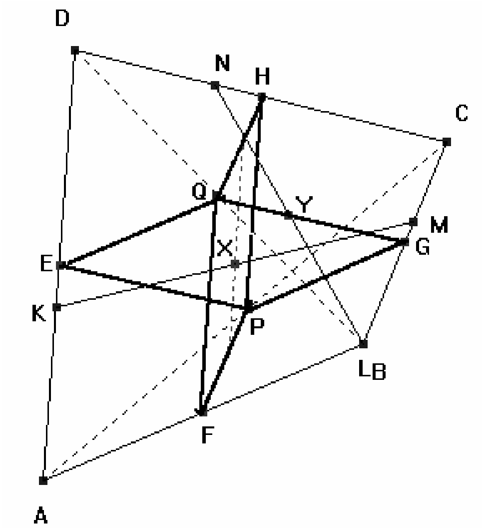
Olgu antud nelinurk *ABCD*. Olgu lõikude *KM* ja *LN* keskpunktid vastavalt *X* ja *Y* (vt joonis 4.108). Otsitavaks lookuseks on kaks rööpkülikut *EPGQ* ja *FPHQ*, mille tipud asetsevad antud nelinurga *ABCD* külgede keskpunktides ja diagonaalidel.

Uurime piirjuhtu, kui lookuseks saame rööpküliku külje. Kattugu punktid *L* ja *B* ning punkt *N* libisegu mööda nelinurga *ABCD* külge *DC*. Sellisel juhul saame jäljeks kolmnurga *LDC* kesklõigu *QG*, kus lõigu otspunkt *Q* on nelinurga *ABCD* diagonaali *BD* keskpunkt. Analoogiliselt saame joonisel 4.108 olevate rööpkülikute ülejäänud küljed.

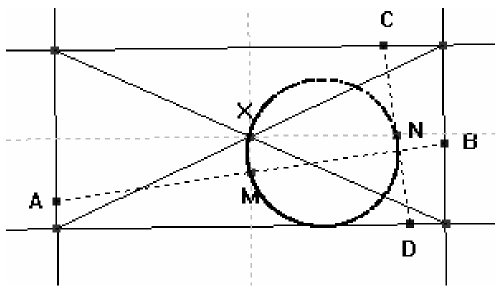
Rööpkülikute *EPGQ* ja *QFPH* sisepunktid saame, kui lohistada lõikude *KM* ja *NL* otspunkte mööda nelinurga külgi. Põhjendus on analoogiline piirjuhtudega.

Lahendus 3.7.

Jäljeks on ringjoon (vt joonis 4.109). Asugu punktid *A* ja *B* ning *C* ja *D* ristküliku vastaskülgedel. Olgu lõigu *AB* keskpunkt *M* ning lõigu *CD* keskpunkt *N* ja diagonaalide lõikepunkt *X*. Teame, et ristküliku diagonaalide lõikepunkt *X* asub ristküliku külgede keskristsirgete lõikepunktis. Samas keskristsirged läbivad ka lõikude *AB* ja *CD* keskpunkte vastavalt punktides *M* ja *N*. Seetõttu $\angle MXN = 90°$ ja jäljeks on ringjoon diameetriga *MN*.



Joonis 4.108.



Joonis 4.109

Lahendus 3.8.

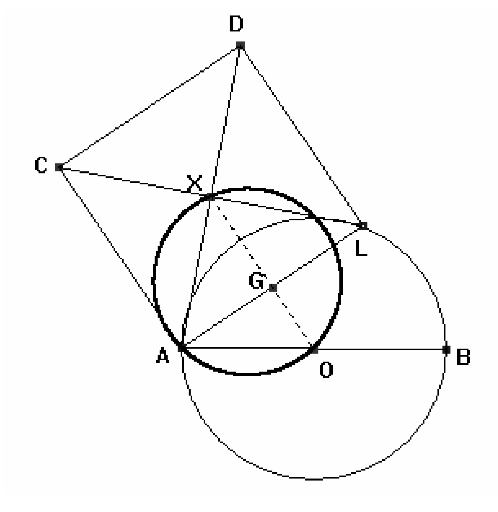
Juhised.

- ❖ Konstrueerige fikseeritud raadiusega ringjoon keskpunktiga *O*. Konstrueerige diameeter *AB*.
- ❖ Kinnitage ringjoonele vaba punkt *L*. Konstrueerige lõik *AL* (so ruudu külg).
- ❖ Ruudu tegemiseks tõmmake külje *AL* otspunktidest ristsirged. Konstrueerige ringjoon keskpunktiga *A* ja raadiusega *AL*. Fikseerige ringjoone ja ristsirge lõikepunkt *C*. Konstrueerige küljega *AL* paralleelne punkti *C* läbiv sirge. Fikseerige selle ja lõikepunkt punkti *L* läbiva ristsirge lõikepunkt *D*.
- ❖ Peitke ülearused jooned ja mugandage joonist.
- ❖ Konstrueerige ruudu diagonaalid ja tähistage nende lõikepunkt tähega *X*.

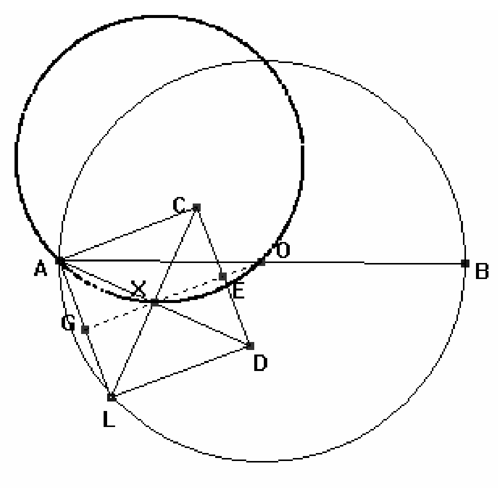
1) Punkti *L* lohistamisel liigub punkt *X* mööda ringjoont (vt joonis 4.110). Näitame, et jäljeks on ringjoon.

Joonistame nurga *AXL* poolitaja ja näitame, et see läbib punkti *O*. See poolitaja on risti ruudu küljega *AL* ning poolitab selle (*miks?*) punktis *G*. Samas teame, et ringjoone iga kõõlu keskristsirge läbib ringjoone keskpunkti. Seega nurga *AXL* poolitaja läbib punkti *O*. Kuna lõik *OX* poolitab nurga *AXL*, siis punkti *L* iga asendi korral $\angle AXO = 45°$. Seega, kui liikuda punktiga *L* päripäeva punktist *A* punkti *B*, on see nurk mingi ringjoone kaarele *AO* toetuv piirdenurk ja jäljeks on ringjoone kaar.

Vaatleme juhtu, kui punkt *L* läheneb vastupäeva punktile *B* ja leiame sel juhul nurga *AXO* suuruse (vt joonis 4.111). Tähistades nurga *CXD* poolitaja ja ruudu külje *CD*



Joonis 4.110.



Joonis 4.111.

lõikepunkti tähega *E*, saame $\angle AXO = \angle AXC + \angle CXE$. Analoogiliselt eespool näidatuga saame, et nurga *CXD* poolitaja läbib ringjoone keskpunkti *O* ja $\angle CXE = 45°$. Kui punkt *L* läheneb vastupäeva punktile *B*, siis nurk

$$\angle AXO = \angle AXC + \angle CXE =$$

$$= 90° + 45° = 135°,$$

toetudes kõõlule *AO*. Seega tegu piirdenurgaga ning punkti *X* jäljeks on ringjoone kaar.

Kuna mõlema vaadeldud juhu samale kõõlule toetuvate piirdenurkade *AXO* summa on 180°, siis need nurgad tipuga *X* toetuvad sama ringjoone kaarele.

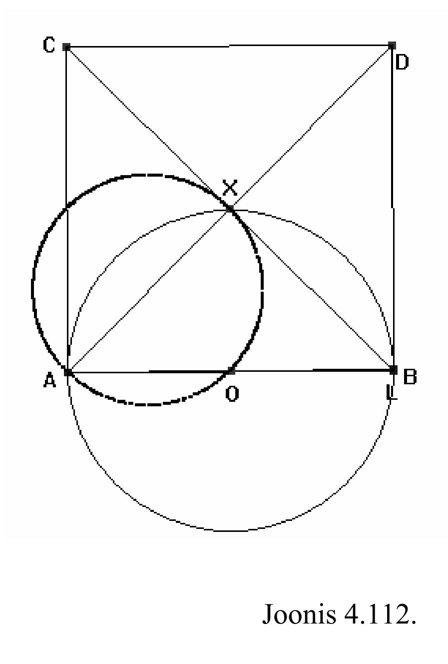
2) Uurime, kuidas suhtuvad jälje ja juhtjoone raadiused. Tähistame need vastavalt tähtedega *r* ja *R*.

Vaatleme olukorda, kus ruudu külg *AL* ühtib diameetriga *AB* (vt joonis 4.112). Sellisel juhul asub jälge kujutav punkt *X* punktist *A* kõige kaugemal (*miks?*). Sellisel juhul on lõik *AX* jälje diameetriks. Seega jälje diameeter on pool sellise ruudu diagonaalist, mille külje pikkus on *AB.* Pythagorase teoreemi abil saame

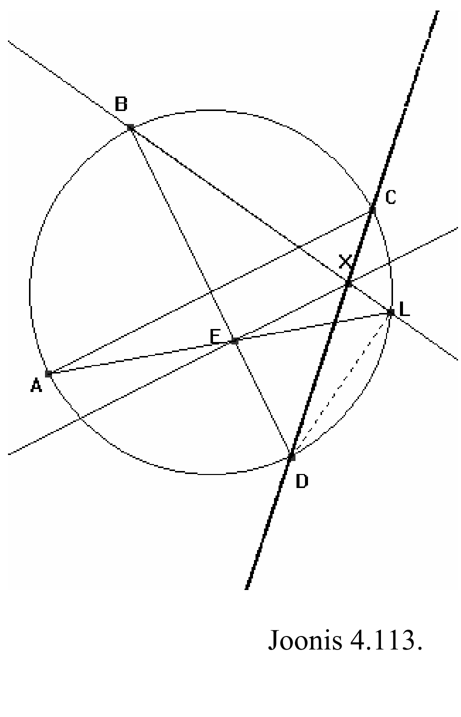
$$(2r)^2 + (2r)^2 = (2R)^2,$$

millest

$$r = \frac{R\sqrt{2}}{2}.$$



Joonis 4.112.



Joonis 4.113.

Lahendus 3.9.

Jäljeks on sirge *CD* (vt joonis 4.113). Põhjendame selle väite. Teame, et $\angle DEX = 90°$. Konstrueerime lõigu *LD*. Piirdenurgad $\angle BLA = 45°$ ja $\angle ALD = 45°$. Seega $\angle XLD = 90°$ ja punktid *E, D, L* ja *X* asuvad ühel ja samal ringjoonel. Seega sama ringjoone kaarele *ED* toetuvad nurgad $\angle DXE = \angle DLE = 45°$. Seega punkt *X* liigub mööda sirget, mis moodustab punkti *E* läbiva sirgega *EX* nurga 45°.

Lahendus 3.10.

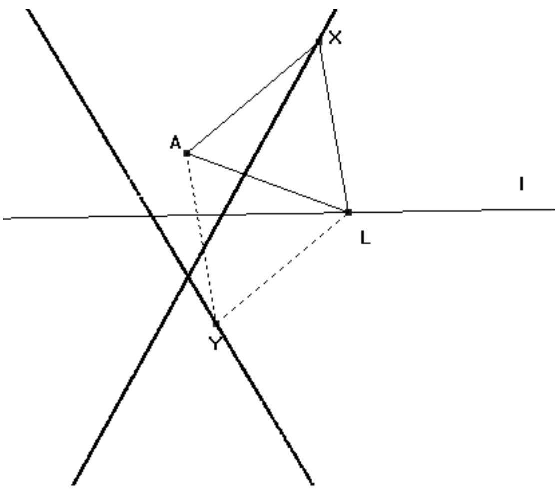
Antud ülesande põhjal saab konstrueerida kaks kolmnurka *ALX* ja *ALY*, kus tipud *A* ja *X* asuvad ühe pool sirget *l* ning tipud *A* ja *Y* ei asu ühel pool sirget *l*. Lookuseks on kaks lõikuvat sirget (vt joonis 4.114).

1) Uurime kõigepealt juhtu, kui *A* asub sirgel *l*.

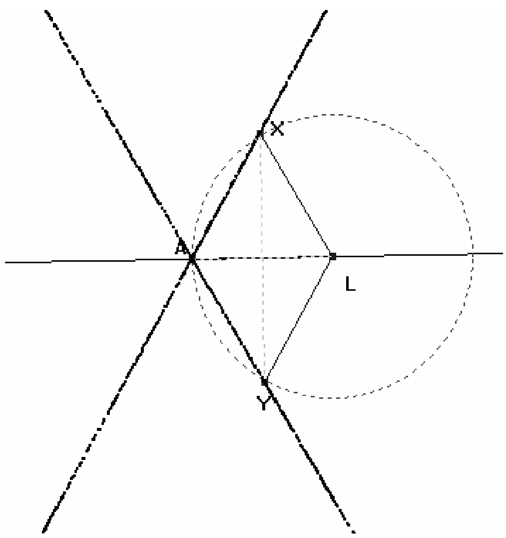
Täiendame joonist. Konstrueerime keskpunktiga *L* ja raadiusega *AL* ringjoone ning lõigu *XY*. Teame, et saadud ringjoon on kolmnurga *AXY* ümberringjoon (vt joonis 4.115).

Vaatleme kolmnurka *AXY*. Teame, et $\angle XAY = 120°$ on kaarele *XY* toetuv piirdenurk ja $\angle AXY = \angle AYX = 30°$. Seega punktid *X* ja *Y* kirjeldavad sirgeid, millest sirge *l* on 60° nurga all.

2) Uurime nüüd juhtu, kui punkt *A* ei asu sirgel *l*. Uurime siin kahte juhtu:



Joonis 4.114.



Joonis 4.115.

a) punktide X ja Y kaugus sirgest l on suurem $\frac{1}{2}AB$;

b) punkti X või Y kaugus sirgest l on väiksem $\frac{1}{2}AB$;

c) punktide X ja Y kaugus sirgest l on $\frac{1}{2}AB$,

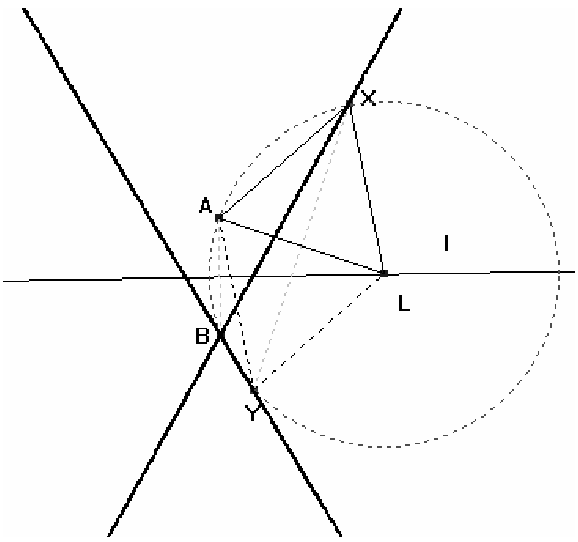
kus punkt B on punkti A peegeldus sirge l suhtes.

a) Olgu punktide X ja Y kaugus sirgest l on suurem $\frac{1}{2}AB$ (vt joonis 4.116)..

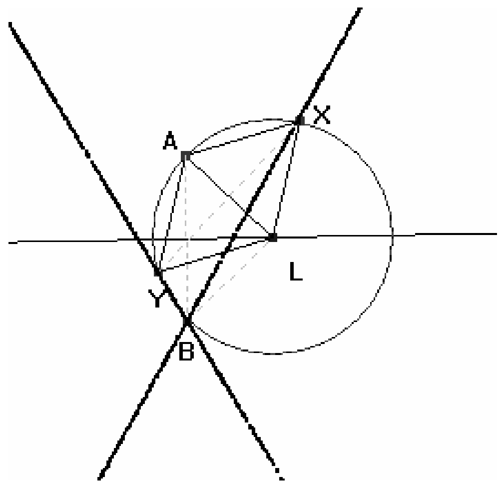
Kuna $\angle XAY$ ja $\angle XBY$ toetuvad samale kaarele XY, siis $\angle XAY = \angle XBY = 120°$ need on piirdenurgad ning punktid X ja Y kirjeldavad punkti L lohistamisel nurga $\angle XBY$ haarasid.

b) Olgu punkti X või Y kaugus sirgest l on väiksem $\frac{1}{2}AB$ (vt joonis 4.117). Sellisel juhul toetuvad kaarele XY kesknurk $\angle XLY = 120°$ ja piirdenurk $\angle YBX = 60°$. Seega punktid X ja Y kirjeldavad piirdenurga $\angle YBX$ haarasid.

c) Olgu punktide X ja Y kaugus sirgest l võrdne $\frac{1}{2}AB$. Sellisel juhul ühtivad punktid Y ja B või X ja B ning ühel ja samal sirgel asuvad vastavalt punktid B ja X või B ja Y. Seega punkt B on lookuste lõikumispunkt.



Joonis 4.116.



Joonis 4.117.

Lahendus 3.11.

Lookuseks on ringjoon (vt joonis 4.118).

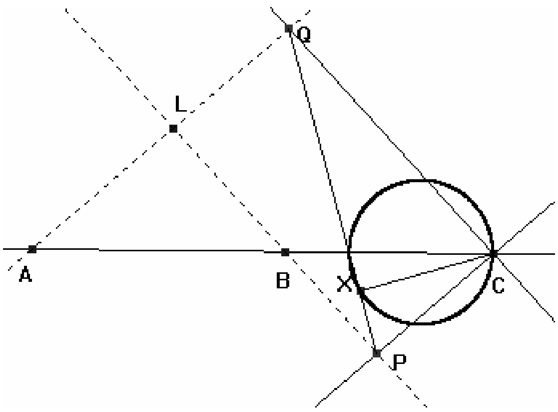
Täiendame joonist, tähistades lõigu *PQ* ja sirge *AC* lõikepunkti tähega *D* (vt joonis 4.119). Näitame esmalt, et punkti *L* lohistamisel jääb punkt *D* püsipunktiks. Selleks piisab näidata, et suhe $\frac{DC}{BD}$ on mingi konstant. Rööpkülikus *PCQL* tekivad sarnased kolmnurgad *BPD* ja *DCQ* (*miks?*). Seega

$$\frac{DC}{BD}=\frac{QC}{BP}=\frac{LP}{BP}=\frac{LB+BP}{BP}=1+\frac{LB}{BP}=1+\frac{AB}{BC},$$

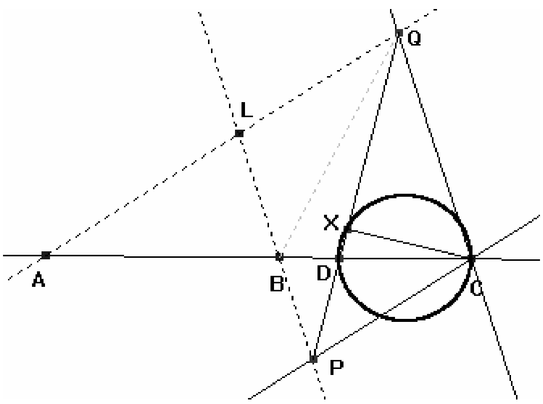
sest ka kolmnurgad *ABL* ja *BPC* on sarnased. Kuna punktid *A, B,* ja *C* on fikseeritud, siis suhe $\frac{DC}{BD}$ on konstant ja punkt *D* on fikseeritud.

Näitame nüüd, et jäljeks on ringjoon.

Teame, et $\angle CXD = 90°$ toetub alati lõigule *CD*. Seega, lohistades punkti *L,* ongi punkti *X* jäljeks diameetriga *CD* ringjoon.



Joonis 4.118.



Joonis 4.119.

Lahendus 3.12.

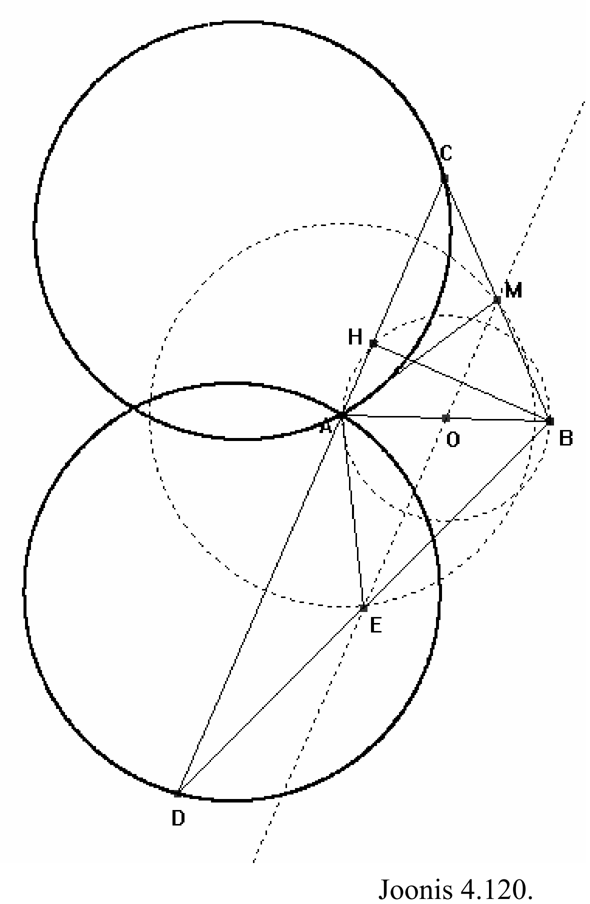
Juhised.

- Joonistage lõik *AB*. Konstrueerige ringjoon diameetriga *AB*. Kinnistage ringjoonele vaba punkt *H*. Joonistage sirge *AH*.
  - Tõmmake kõrgus *BH*.

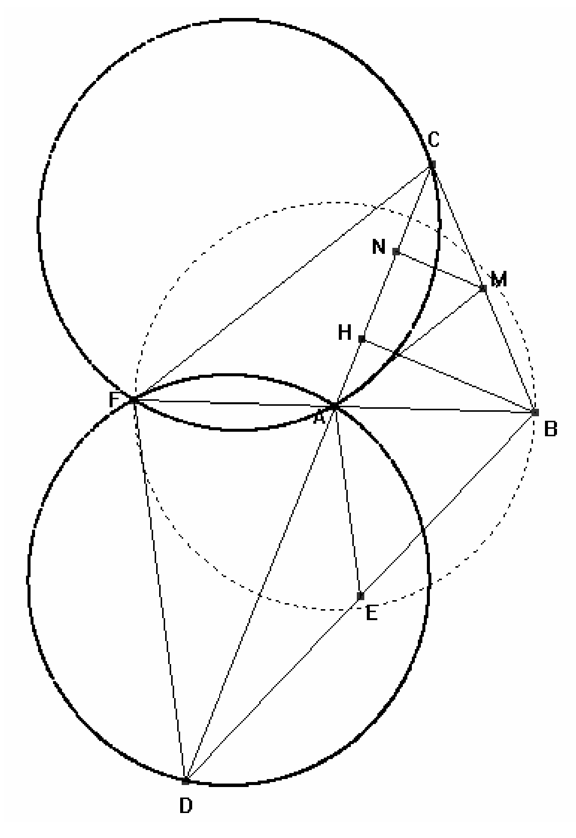
- Konstrueerige sirgega *AH* paralleelne sirge, mis läbib lõigu *AB* keskpunkti *O*. Konstrueerige keskpunktiga *A* ja raadiusega *BH* ringjoon. Fikseerige selle ringjoone ja punkti *O* läbiva sirgega *AH* paralleelse sirge lõikepunkt *M*.
- Joonistage kiir *BM*. Fikseerige selle ja sirge *AH* lõikepunkt *C*.
- Peitke ebavajalikud jooned.
- Lohistage punkti *H* ja konstrueerige tipu *C* jälg.

Jäljeks on kaks punktis *A* lõikuvat ringjoont raadiusega *AB* (vt joonis 4.120). Paneme tähele, et me saame konstrueerida kaks ülesande tingimusi rahuldavat kolmnurka: kolmnurk *ABC* mediaaniga *AM* ja kolmnurk *ABD* mediaaniga *AE*. Näitame, et tippude *C* ja *D* jälgedeks on kaks lõikuvat ringjoont. Täiendame joonist punktiga *F*, mis on sümmeetriline punktiga *B* punkti *A* suhtes (vt joonis 4.121) ja vaatleme kolmnurka *FBC*. Konstrueerime lõigule *AC* ristlõigu *MN*. Siis $MN = \frac{1}{2}BH = \frac{1}{2}AM$.

Seega alati $\sin(\angle CAM) = \frac{1}{2}$ ehk $\angle CAM$ =30° või $\angle CAM$ =150°. Kuna lõik AM on



Joonis 4.120.



Joonis 4.121.

kolmnurga *FBC* kesklõiguks (*miks?*), siis $FC \parallel AM$. Lõik *AC* moodustab paralleelsete haaradega nurgad *CAM* ja *FCA*, seega $\angle CAM = \angle FCA$. Seega $\angle FCA$ on lõigule *FA* toetuv piirdenurk. Lohistades punkti *H*, kirjeldab tipp *C* ringjoone[12].

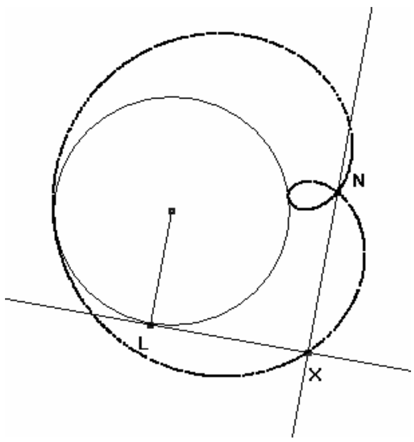
Analoogiliselt saab põhjendada kolmnurga *ABD* korral.

Teame, et lõigule *FA* toetuv piirdenurk on 30°. Saame, et vastav kesknurk on 60°. Seega jäljeks saadud ringjooned on raadiusega *AB*.

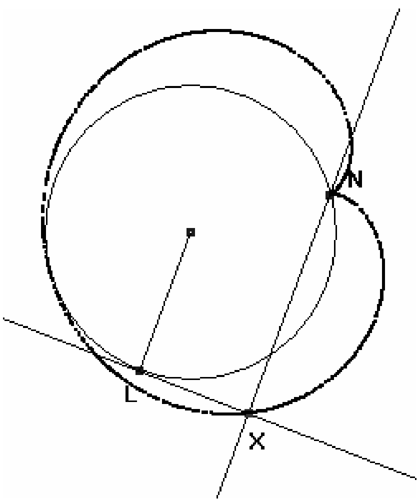
Lahendus 3.13.

Kui punkt *N* asub

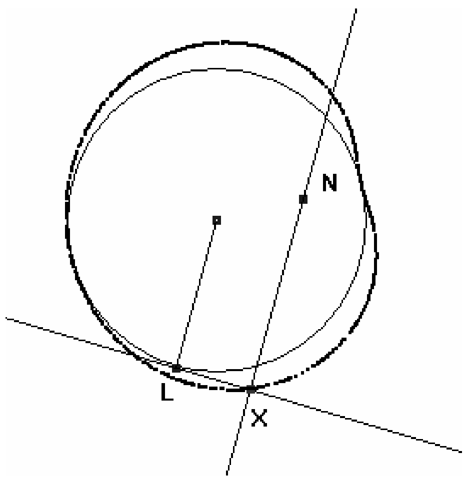
1) väljaspool ringjoont, on jäljeks sisemise silmusega tigu (vt joonis 4.122);
2) ringjoonel, on jäljeks teravikuga tigu e kardioid (vt joonis 4.123);
3) seespool ringjoont, on jäljeks lohkus tigu (vt joonis 4.124).



Joonis 4.122.



Joonis 4.123.



Joonis 4.124.

[12] Taas ilmneb üks programmi GeomeTricks puudujääk: punkti *H* lohistamisel punktid *C* ja *D* „vahetavad" oma nimed. Lookuseks tekib kaks lõikuvat ringjoont, millest punkt *C* peaks kirjeldama üht ja punkt *D* teist ringjoont.

Lahendus 3.14.

Juhised.

- Joonistage fikseeritud raadiusega ringjoon keskpunktiga *O*. Kinnistage sellele vaba punkt *B* ning asetage ringi sisepiirkonda vaba punkt *A*.
- Joonestage raadius *OB*.
- Konstrueerige lõik *AB* ning selle keskristsirge. Fikseerige keskristsirge ja raadiuse *OB* lõikepunkt, tähistades viimase tähega *X*.
- Konstrueerige punkti *X* jälg punkti *B* vabal lohistamisel mööda ringjoont.
- Leidke punkti *X* kauguste summa punktidest *O* ja *A*. Kuidas muutub summa, kui lohistada punkti *B* mööda ringjoont? Põhjendage saadud hüpotees.

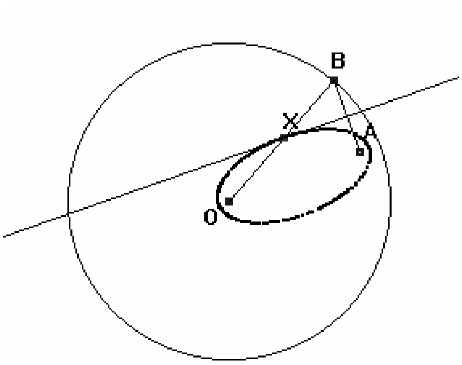
Jäljeks on joonisel 4.125 toodud joon. Lõikude *OX* ja *XA* pikkuste summa jääb punkti *B* lohistamisel konstantseks ja võrdub lähteringjoone raadiusega.
Meil on konstrueeritud punkt *X* lõigu *AB* keskristsirge abil. Keskristsirge punktide omaduse tõttu on lõigud *XB* ja *XA* võrdsed, st

$$OB=OX+XB=OX+XA.$$

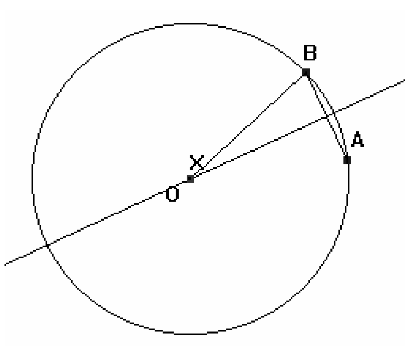
Seega on jäljeks ellips fookustega punktides *O* ja *A*.

Lahendus 3.15.

Jäljeks on ringjoone keskpunkt *O* (vt joonis 4.126).
Antud juhul on lõik *AB* ringjoone kõõluks ja tema keskristsirge läbib ringjoone keskpunkti *O*. Seega punktid *O* ja *X* kattuvad.



Joonis 4.125.



Joonis 4.126.

Ülesanne 3.16.

Jäljeks on joonisel 4.127 toodud joon. Selgub, et punkti B lohistamisel $OX - AX = OB$.

Keskristsirge omaduse tõttu $XB = XA$. Seega

$OB = OX - XB = OX - XA$.

Vastavalt hüperbooli definitsioonile on saadud jälg hüperbool.

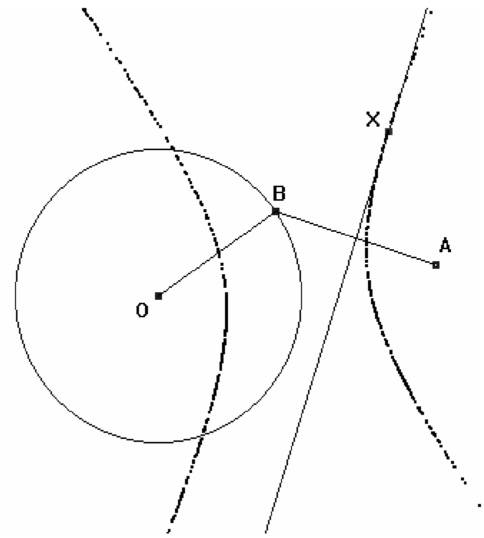
Lahendus 3.17.

1) Jäljeks on ringjoon diameetriga *AB*, va punkt *A* (vt joonis 4.128).

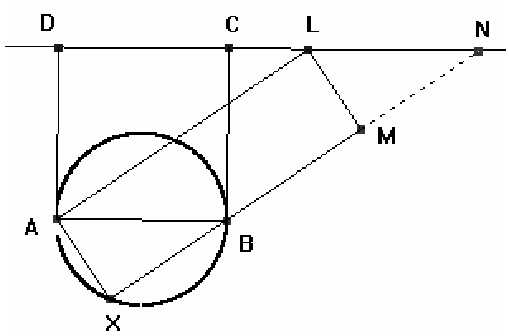
Vaatleme kõigepealt juhtu, kui ristküliku *AXML* tipp *X* asub väljaspool ruutu *ABCD*. Kuna ristküliku nurga $\angle AXB = 90°$ suurus ei saa muutuda, siis nurk $\angle AXB$ on mingi ringjoone diameetrile toetuv piirdenurk. Seega tipu *L* lohistamisel tekib punkti *X* jäljeks diameetriga *AB* ringjoone kaar.

Kui nüüd ristküliku tipp *X* asub seespool ruutu, siis samuti $\angle AXB = 90°$.

2) Ruudu *ABCD* ja ristküliku *AXML* pindalad on võrdsed. Tõestame selle väite. Pikendame ristküliku *AXML* külge *XM* lõikumiseni sirgega *DL* ja tähistame lõikepunkti tähega *N* (vt joonis 4.128). Näitame, et kolmnurgad *AXB* ja *LMN* on võrdsed. Küljed *AX* ja *LM* on võrdsed. Nurgad *ABX* ja *LNM* on võrdsed, kui paralleelsete sirgete lõikamisel kolmanda sirgega tekkinud kaasnurgad. Samal põhjusel on võrdsed ka nurgad *XAB* ja



Joonis 4.127.



Joonis 4.128.

MLN. Seega saadud rööpküliku *ABNL* pindala on võrdne ristküliku *AXML* pindalaga e $S_{ABNL} = S_{AXML}$.

Vaatleme nüüd nelinurki *ABCD* ja *ABNL*. Võttes aluseks rööpküliku *ABNL* külje *AB* ja kõrguseks lõigu BC saame, et $S_{ABNL} = S_{ABCD}$. Kahest viimasest võrdusest saame $S_{AXML} = S_{ABCD}$.

3) Korrutis $AX \cdot XM$ on konstantne. Kuna ruudu *ABCD* ja ristküliku *AXML* pindalad on võrdsed ja ruudu pindala on muutumatu.

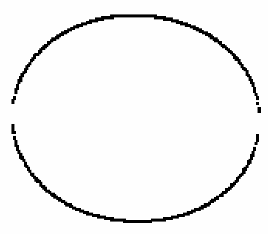
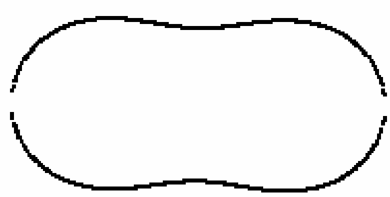
<u>Lahendus 3.18.</u>

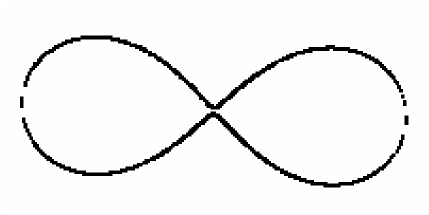
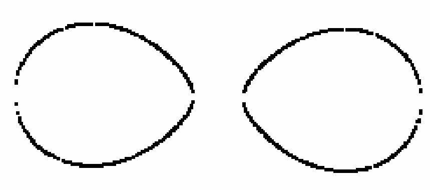
<u>Juhised.</u>

- ❖ Asetage tasandile kaks vaba punkti (so fookused) ja joonestage mõlematest neist ringjooned raadiustega *AX* ja *XM*.
- ❖ Leidke vajalikud lõikepunktid.

Olgu fookuste vaheline kaugus *d*. Uurime Cassini ovaali erinevaid kujusid, kui kaugus *d* on seotud küljega *AD* (vt joonis 4.128). Tabelis 4.1 on toodud saadud lookused.

`Tabel 4.1.` Cassini ovaal.

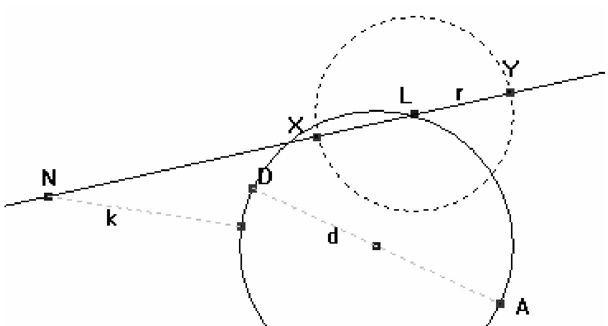
Seos	Cassini ovaal
$d\sqrt{2} \le 2AD$	
$d < 2AD < d\sqrt{2}$	

$d = 2AD$	
$d > 2AD$	

Lahendus 3.19.

Juhised.

- ❖ Asetage ekraanile kaks vaba punkti ja konstrueerige nende abil ringjoon (so juhtjoon). Tähistage ringjoonele kuuluv punkt tähega *A*.
- ❖ Fikseerige vaba punkt *N* ja ringjoonele kinnistatud vaba punkt *L*. Konstrueerige sirge *NL*.
- ❖ Konstrueerige fikseeritud raadiusega ringjoon keskpunktiga *L*. Leidke viimase ringjoone ja sirge *NL* lõikepunktid, tähistades need *X* ja *Y*. (Muutke viimati konstrueeritud ringjoon katkendlikuks või peitke see.)



Joonis 4.129.

- ❖ Leidke punktide *X* ja *Y* jäljed, lohistades punkti *L* mööda ringjoont diameetriga *AD*. Juhtjoone diameetri suurust saate muuta lohistades punkti *A* (vt ka joonis 4.129.).

1) Fikseeritud punkt *N* asub väljaspool juhtjoont (vt tabel 4.2 lk 109).
2) Fikseeritud punkt *N* asub juhtjoonel (vt tabel 4.3 lk 110). Saadud lookust nimetatakse **Pascali teoks**.
3) Fikseeritud punkt *N* asub seespool juhtjoont (vt tabel 4.4 lk 111).

<u>Lahendus 3.20.</u>

1) Lookuseks on antud sirgetega paralleelne sirge (vt joonis 4.130). Näitame seda.

Vaatleme punkti *L* lohistamisel saadud lõigu *NK* kahte asendit. Nurga lõikamisel paralleelsete sirgetega kehtib seos

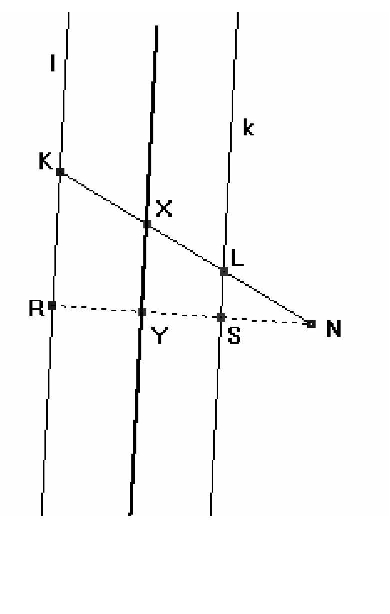
$$\frac{LN}{SN} = \frac{KL}{RS}.$$

Kuna $KL=XN$ ja $RS=YN$, siis

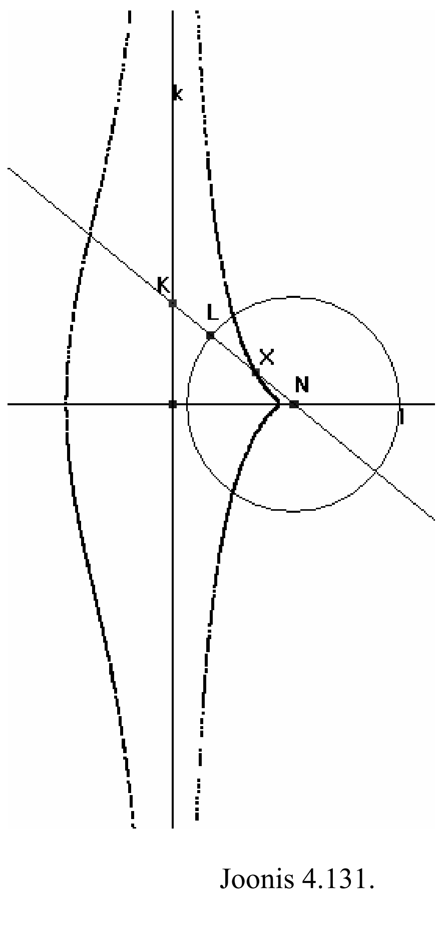
$$\frac{LN}{SN} = \frac{KL}{RS} = \frac{XN}{YN}.$$

Seega punktid *X* ja *Y* asuvad sirgega *k* ja *l* paralleelsel sirgel.

2) Lookuseks on Nikomedese konhoid (vt joonis 4.131).

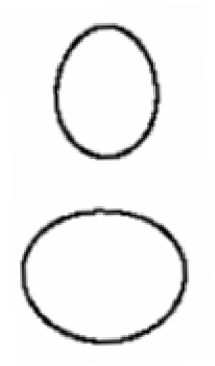
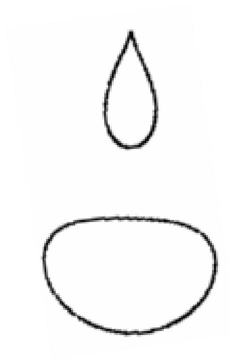
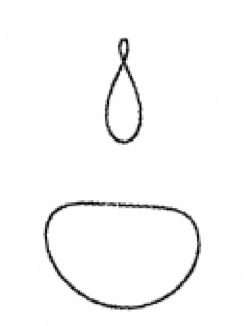
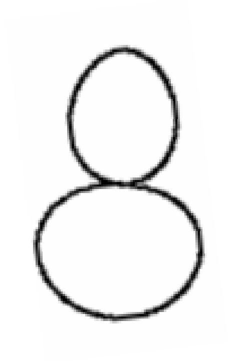
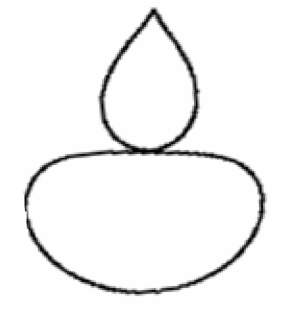
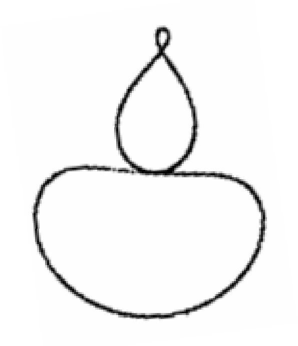
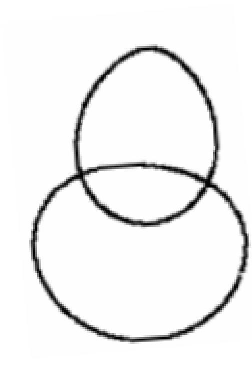
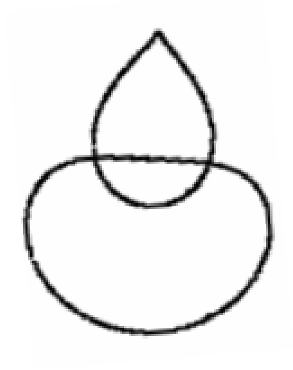
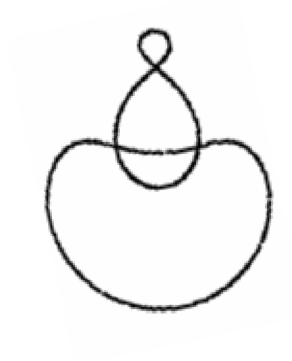


Joonis 4.130.

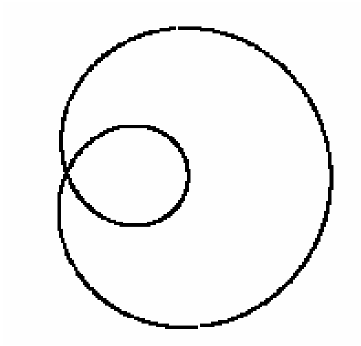
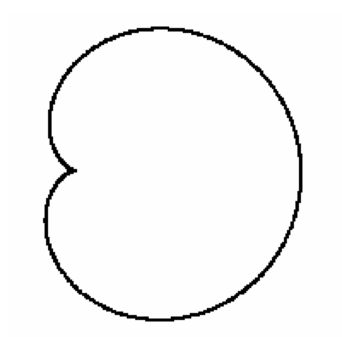
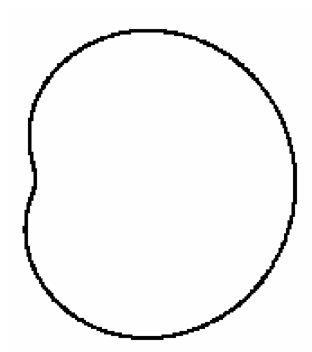


Joonis 4.131.

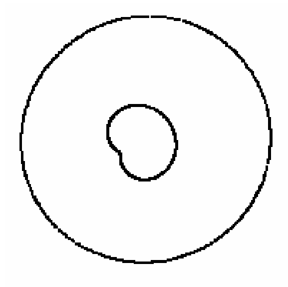
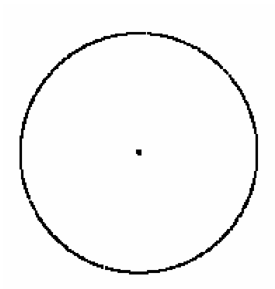
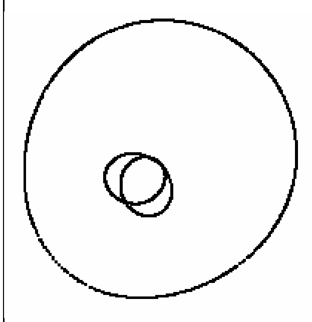
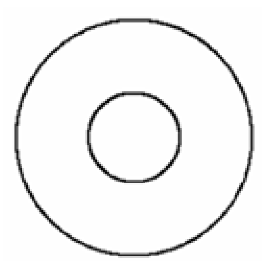
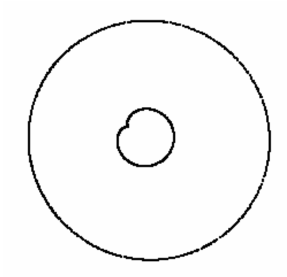
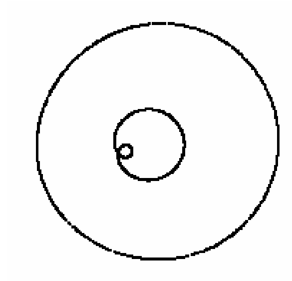
Tabel 4.2. Ringjoone konhoid, kui punkt *N* asub väljaspool juhtjoont.

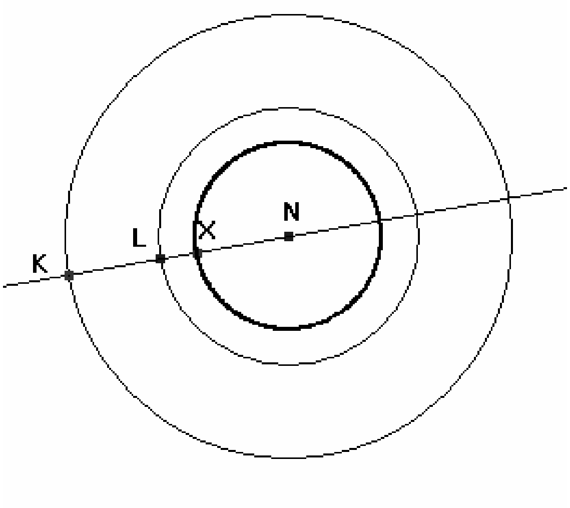
	$k > r$	$k = r$	$k < r$
$r > \frac{d}{2}$			
$r = \frac{d}{2}$			
$r < \frac{d}{2}$			

Tabel 4.3. Ringjoone konhoid, kui punkt N asub juhtjoonel.

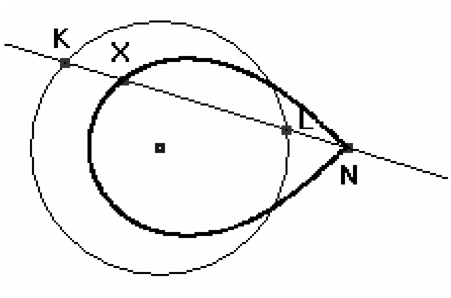
	$k > r$	$k = r$	$k < r$
$r > d$	-	-	
$r = d$	-	-	
$r < d$	-	-	

Tabel 4.4. Ringjoone konhoid, kui punkt *N* asub seespool juhtjoont.

	$k > r$	$k = r$	$k < r$
$r > \frac{d}{2}$	-	-	
$r = \frac{d}{2}$	-		
$r < \frac{d}{2}$			



Joonis 4.132.



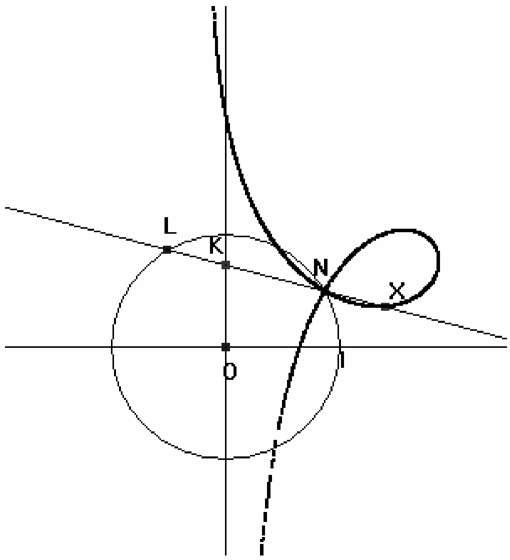
Joonis 4.133.

3) Lookuseks on antud ringjoontega kontsentriline ringjoon (vt joonis 4.132).

4) Joonisel 4.133 on esmapilgul näha, et jäljeks tekib Bernoulli lemniskaadi üks silmus. Lohistades punkti *L* ja jälgides vektorite $\vec{LK}$ ja $\vec{NX}$ liikumist selgub, et programmi GeomeTricks puudujäägi tõttu tekib vaid üks silmus kahe asemel. Lookuseks peab tegelikult olema kahe silmusega Bernoulli lemniskaat.

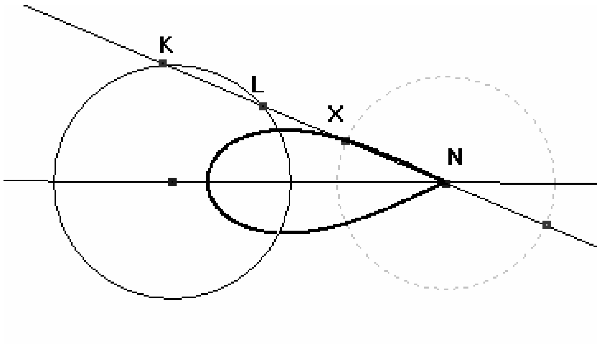
5) Lookuseks on (kald)strofoid (vt joonis 4.134)

6) Lookuseks on Boothi joon [26]. Kui punkt *N* asub väljaspool ringjoont, siis tekib jäljeks kahe silmusega Boothi lemniskaat, mis on punkti *N* suhtes sümmeetrilised[13] (vt joonis 4.135). Kui punkt *N* asub seespool ringjoont, on jäljeks Boothi ovaal (vt joonis 4.136).

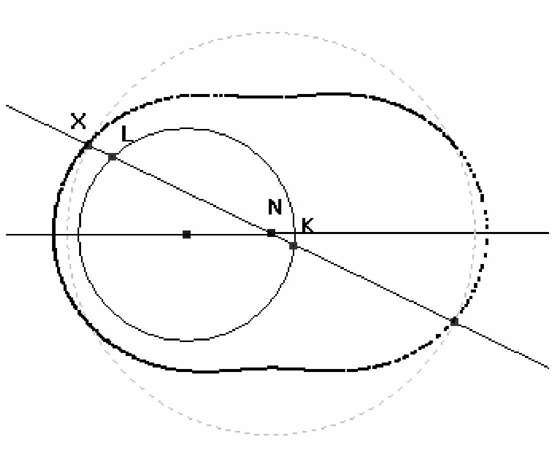


Joonis 4.134.

[13] Lohistades punkti *L*, jälgige vektoreid $\vec{LK}$ ja $\vec{NX}$! Programmi GeomeTricks puuduse tõttu tekib vaid üks silmus kahe asemel.



Joonis 4.135.



Joonis 4.136.

Kokkuvõte

Käesoleva magistritöö eesmärgiks oli koostada õppevahend, mis oleks sobiv nii gümnaasiumiklasside matemaatikaringidele kui ka ülikooli esimestele kursustele. Töös pakutud ülesanded on põhiliselt lookuste konstrueerimise ülesanded ja need on lahendatavad dünaamilise geomeetria tarkvara abil. Maailmas on kasutavad sellised tasulised dünaamilise geomeetria programmid nagu Euklid DynaGeo, Cabri Geometre, Geometers Sketchpad, Cinderella, Geolog jt ning vabavarana GeomeTricks, GeoneXt, GeoGebra, Z.u.L. jt. Antud töös toetutakse programmile GeomeTricks.

Konstruktsioonülesannete lahendamise loomulikeks etappideks on joonise konstrueerimine ja ülesande lahenduse põhjendamine. Vastavalt ülesande raskusastmele on töös osade ülesannete korral nõutud rangeid põhjendusi, osade puhul aga vaid selgitusi ja kirjeldusi.

Töö koosneb neljast peatükist. Esimeses peatükis antakse ülevaade programmist GeomeTricks. Teises peatükis uuritakse kolmnurga külgede keskristsirgete, nurgapoolitajate, mediaanide ja kõrguste lõikepunkti lookust. Kolmas peatükk pakub erinevaid ülesandeid lookuste konstrueerimisele. Neljandas peatükis on toodud ülesannete lahendused ja põhjendused ning keerukamate ülesannete puhul ka konstruktsioonide juhiseid.

Töö koostamisel ilmnesid programmi GeomeTricks juures mitmed puudused. Näiteks:

1) Konstruktsioonides tuli ette olukordi, kus mingi punkti lohistamisel ei säilinud selle punktiga seotud vektorite samasuunalisus (vt ptk III ül 3.19 p 2 ja 5).
2) Kahe joone lõikepunktide tähistused haakusid üksteisest möödumisel ühe punkti külge (vt ptk III ül 3.10 ja 3.19 p 4 ja 6). Selline asjaolu raskendas jooniselt olulise informatsiooni välja lugemist.
3) Kolmnurga tipu lohistamisel muutusid kolmnurga nurkade orientatsiooni muutudes tema sisenurga poolitajad välisnurkade poolitajateks.

Töö koostamise käigus selgus ka, et dünaamilise geomeetria tarkvara GeomeTricks kasutamine lookuste konstrueerimisel eeldab geomeetria tüüpiliste konstruktsioonülesannete head lahendusoskust. Paraku aga puudub meil seni vastav dünaamilise geomeetria tarkvarale orienteeritud õppevahend. Selle koostamine võiks tulla edasises kõne alla.

Lookuse mõiste võimaldab geomeetriaõpetust muuta õpilastele atraktiivsemaks. Käesoleva töö kaudu saab ettekujutuse vaid vähestest lookustest. Võimalik on magistritööd edasi arendada viimast arvesse võttes.

Programm GeomeTricks pakub veel sirge jälje konstrueerimise võimaluse. Seda teemat antud töös ei käsitletud. Ilmselt pakub ka see võimalus sama palju avastamisrõõmu kui punkti jälje leidmine.

Loci, constructing them with the help of dynamic geometric software

Aile Jair

Summary

The aim of the present master's thesis was to compile a teaching aid that would be appropriate for both the mathematics clubs of senior grammar school classes and the junior years of universities. The exercises proposed in the thesis are mainly exercises for constructing loci and can be solved with the help of dynamic geometric software. Various paywares of dynamic geometry are used in the world, such as Euklid DynaGeo, Cabri Geometre, Geometers Sketchpad, Cinderella, Geolog, etc., and freewares such as GeomeTricks, GeoneXt, GeoGebra, Z.u.L., etc. The present thesis focusses on the programme GeomeTricks.

The natural phases of solving construction exercises are the construction of a figure and the argumentation of the solution of the exercise. According to the difficulty degree of an exercise, some exercises in the thesis require strict argumentation, whereas others only need explanations and descriptions.

The thesis consists of four chapters. The first chapter gives an overview of the programme GeomeTricks. The second chapter examines the locus of the intersection of the midperpendiculars, bisectors, medians and heights of a triangle's sides. The third chapter presents various exercises for the construction of loci. The fourth chapter presents the solutions and argumentations for the exercises and in case of more complex exercises, also the instructions for constructions.

When compiling the thesis, several shortcomings appeared in GeomeTricks. For example:

1) There were situations in the constructions, in case of which when dragging a point, the confluency of the vectors connected to this point did not persist (see chapt. III exerc. 3.17 clauses 2 and 5).
2) The markings of the intersections of two lines hooked with one point when passing each other (see chapt. III exerc. 3.10 and 3.17 clauses 4 and 6). This circumstance made it more difficult to read important information on the figure.

3) When dragging the tip of the triangle, the bisectors of its interior angle changed into the bisectors of the exterior angle as orientation changed.

When compiling the thesis, it also appeared that the use of the dynamic geometric software GeomeTricks at the construction of loci presupposes good skills of solving typical construction exercises. However, so far we do not have a teaching aid oriented at dynamic geometric software. The compilation of it could be feasible in the future.

The concept of a locus can make the teaching of geometry more attractive for students. The present thesis gives an overview of only a few loci. Thus, the thesis could be developed further in that direction.

The programme GeomeTricks also provides the opportunity of constructing a straight track. This has not been discussed in the thesis. This will probably be as pleasing to discover as finding the track of a point.

Kasutatud kirjandus

[1] Abel, E., Abel, M. & Kaasik, Ü. 1998. *Koolimatemaatika entsüklopeedia*. Tartu: Ilmamaa.

[2] Berengard, Y. *Geometrical locus. Circle and circumference.* URL=http://www.bymath.com/studyguide/geo/geo10.htm. 28.10.2004.

[3] Deihardt, A. 2000. Die Ortskurven des Höhenschnittpunktes. *Vechtaer fachdidaktische Forschungen und Berichte*, 3, 55-63.

[4] Ehmke, T. *Kissoide.* URL=http://www.uni-flensburg.de/mathe/zero/fgalerie/ortslinien/kissoide.html. 27.10.2004.

[5] Kaasik, K. & Lepmann, L. 2002 *Väike metoodikaraamat II kooliastme matemaatikaõpetajale*. Tallinn: Avita.

[6] Kaasik, Ü. 1992. *Matemaatikaleksikon*. Tallinn: Eesti Entsüklopeediakirjastus.

[7] Krull, E. 2001. *Pedagoogilise psühholoogia käsiraamat.* Tartu: Tartu Ülikooli Kirjastus.

[8] Lee, X. *Cissoid*. URL=http://www.xahlee.org/SpecialPlaneCurves_dir/Cissoid_dir/cissoid.html. 22.03.2005.

[9] Lee, X. *Conchoid of Nicomedes.* URL=http://xahlee.org/SpecialPlaneCurves_dir/ConchoidOfNicomedes_dir/conchoidOfNicomedes.html. 16.11.2004.

[10] Lee, X. *Curve Family Index*. URL=http://www.xahlee.org/SpecialPlaneCurves_dir/Intro_dir/familyIndex.html. 16.11.2004.

[11] Lepmann, T. 2000. *Dünaamilise geomeetria elemente*. Tartu: Eesti Matemaatika Selts.

[12] Lepmann, T. & Lepmann, L. 1990. Matemaatika õpetamise lähtekohti uuenevas koolis. *Koolimatemaatika,* XVII, 12-16.

[13] Lepmann, L., Lepmann, T. & Velsker, K. 2000. *Matemaatika 10. klassile*. Tallinn: Koolibri.

[14] Florida Atlantic University. Department of Mathematical Sciences. *Limacon Of Pascal.* URL=http://www.math.fau.edu/kasia/Cabri/curves/limacon/limacon.doc. 16.11.2004.

[15] Wikipedia – The Free Encyclopedia. *Locus (mathematics).* URL=http://en.wikipedia.org/wiki/Locus_(mathematics). 10.05.2005.

[16] Oswego City School District Regents Exam Prep Center. *Locus: At a Fixed Distance from a Line.* URL=http://regentsprep.org/Regents/math/locuslin/LocusLin.htm. 27.10.2004.

[17] Oswego City School District Regents Exam Prep Center. *Locus: At a Fixed Distance from a Point.* URL=http://regentsprep.org/Regents/math/locuspt/LocusFPt.htm. 27.10.2004.

[18] Oswego City School District Regents Exam Prep Center. *Locus: Equidistant from Two Intersecting Lines.* URL=http://regentsprep.org/Regents/math/locusInt/LocusInt.htm. 27.10.2004.

[19] Oswego City School District Regents Exam Prep Center. *Locus: Equidistant from Two Parallel Lines.* URL=http://regentsprep.org/Regents/math/locusPar/Locus Par.htm. 27.10.2004.

[20] Oswego City School District Regents Exam Prep Center. *Locus: Equidistant from Two Points*. URL=http://regentsprep.org/Regents/math/locusTpt/LocusPTS.htm. 27.10.2004.

[21] Landesakademie für Fortbildung und Personalentwicklung an Schulen. *Ortslinien.* URL=http://www.lehrerfortbildung-bw.de/faecher/mathematik/gym/unterricht/dyngeo/lw_bw_mathemtik_1996.html. 16.11.2004.

[22] Tenson, R. 2002. *Arvutiõpetus 6. klassi geomeetria avastavaks õpetamiseks*. Tartu: Tartu Ülikool.

[23] Tõnisson, E. *GeomeTricks 2.28.* URL=http://www.koolielu.ee/pages.php/03020602?txtid=1381. 07.08.2004.

[24] Velsker, K. & Jürimäe, E. 2001. *Koolimatemaatika käsiraamat*. Tallinn: Koolibri.

[25] Wassenaar, J. *(Generalized) Cissoid.* URL=http://www.2dcurves.com/derived/cissoid.html. 10.03.2005.

[26] Wassenaar, J. *Hippopede.* URL=http://www.2dcurves.com/quartic/quartich.html. 10.03.2005.

[27] Weisstein, E. W. *Cissoid*. URL=http://mathworld.wolfram.com/Cissoid.html. 10.03.2005.

[28] Weisstein, E. W. *Conchoid*. URL=http://mathworld.wolfram.com/Conchoid.html. 10.03.2005.

[29] Прасолов, В. В. 1991. *Задачи по планиметри, часть 1.* Москва: Наука.

[30] Шарыгин, И. Ф. & Голубев, В.И. 1991. *Факультативный курс по математике: решение задач: учебное пособие для 11 класса средней школы*. Москва: Просвещение.

[31] Яковлев, Г. Н. 1995. *Геометрия: теория и её использование для решения задач: учебное пособие.* Минск: Альфа.